UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGIA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS

DESARROLLO HISTORICO-PEDAGOGICO DEL CONCEPTO DE COMPACIDAD

YANINA DEL CARMEN RODRIGUEZ REYES

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA EDUCATIVA

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA
2018

Aprobado por:

Jorge Hernández

Dr. Jorge Hernández
Presidente

José A. Camarena

Mgtr. José Camarena
Miembro

Mgtr. Josue Ortiz
Miembro

Mgtr. Marta Perez
Representante de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Fecha: 23 de febrero de 2018.

AGRADECIMIENTO

A Dios nuestro padre por darnos la oportunidad de vivir y de hacer realidad el sueño de cumplir una meta mas

Al ***Dr Jorge Hernandez,*** quien ademas de asesorarme me brindo su amistad a los **Magister Josue Ortiz y Temistocles Zeballos** en los cuales encontre el apoyo suficiente para lograr muy felizmente la culminacion de este trabajo

A los demas profesores del programa de Maestria en Matematica Educativa por todos los conocimientos que me ofrecieron

Eternamente Agradecida

DEDICATORIA

Con mucho amor y respeto dedico este trabajo

A mis hijos ***Yanina Yareli Yareli Yanina Temistocles*** por ser el faro que guia mi deseo de superacion

A mis padres ***Pedro*** e ***Inocencia*** quienes con sus esfuerzos y amor formaron en mi una persona con el deseo permanente de crecer profesionalmente

Asimismo a mis hermanas sobrinos y demas personas que con su apoyo me han ayudado a seguir adelante

Y muy especialmente a ti **Temy** porque fuiste el pilar el soporte del cual me apoye me diste las fuerzas la comprension para finalizar con exito este proyecto y cuando el camino se torno un tanto dificil estabas ahi !

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En esta investigacion se describe la historia del concepto de compacidad iniciando con los problemas especificos que en la segunda mitad del siglo XIX motivaron la formulacion del concepto de compacidad donde los aportes de matematicos como Bolzano Weierstrass Heine Borel Frechet y Lebesgue jugaron un papel fundamental hasta la caracterizacion actual de compacidad en terminos de redes y filtros aportada por matematicos como Moore Smith Birkhoff Riesz y Cartan

Posteriormente se realiza un estudio minucioso de la compacidad en los numeros reales demostrando sus propiedades y las equivalencias de los diferentes criterios de compacidad para luego analizar la validez de estos resultados en $\mathbb{R}$

Finalmente se estudia el concepto de compacidad en los espacios metricos se analizan sus propiedades y se estudia la equivalencia entre diversos criterios de compacidad

ABSTRACT

This work describes the history of the concept of compactness starting with the specific problems that in the second half of the nineteenth century led to the formulation of the concept of compactness It covers the contributions of mathematicians such as Bolzano Weierstrass Heine Borel Frechet and Lebesgue up to the modern characterization of compactness in terms of nets and filters dued to mathematicians such as Moore Smith Birkhoff Riesz and Cartan After that a thorough study of the compactness in the real numbers is made demonstrating its properties and the equivalences of the different compactness criteria to then analyze the validity of these results in $\mathbb{R}$ Finally the concept of compactness in metric spaces is studied its properties are examined and equivalent compactness criteria are verified

INTRODUCCION

La Matematica evoluciona y los cambios hacen mas claros los conceptos y estos se aplican en situaciones mas generales La compacidad surgio en uno de los periodos mas productivos de la actividad matematica En la segunda mitad del siglo XIX en Europa la matematica avanzada comenzo a tomar la forma que conocemos hoy gracias a los trabajos de Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor se establece el principio de un estudio sistematico de la teoria de conjuntos y la topologia conjuntista Ademas muchos matematicos incluyendo Weierstrass Hausdorff y Dedekind estaban preocupados por los fundamentos de la matematica y comenzaron a hacer muchas rigurosidades de las ideas que durante siglos habian sido dadas por sentadas Mientras que algunos de los trabajos del siglo XIX se pueden remontar a las inquietudes matematicas de los antiguos griegos el nivel de rigor y la abstraccion refleja una revolucion en el pensamiento matematico

El concepto de compacidad en espacios metricos es una abstraccion de una propiedad muy importante que poseen ciertos subconjuntos de numeros reales conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ Intuitivamente generaliza el concepto de subconjuntos finitos en conjuntos abstractos

Nuestro proposito en esta investigacion es estudiar algunos problemas especificos que parecen haber motivado el concepto de compacidad y su desarrollo historico pedagogico También estudiamos la compacidad en los espacios metricos $\mathbb{R}$ y en espacios metricos en general probando la equivalencia de diferentes criterios de compacidad

CAPÍTULO I
EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE COMPACIDAD

I EVOLUCION DEL CONCEPTO DE COMPACIDAD

El proposito de este capitulo es describir el desarrollo historico del concepto de compacidad desde las primeras definiciones hasta las caracterizaciones utilizando redes y filtros y de esta forma poder aclarar algunos conceptos que algunos libros de textos tienden a dejar de lado como lo son cubrimiento abierto y compacidad secuencial Supondremos conocida toda la teoria relacionada con un curso de calculo diferencial e integral las cuales facilitaran la comprension del presente trabajo

1 1 ORIGENES DEL CONCEPTO DE COMPACIDAD

La compacidad surgio de uno de los periodos mas productivos de la actividad matematica En la segunda mitad del siglo XIX en Europa las matematicas avanzadas comenzaron a tomar la forma que conocemos actualmente en el fondo era el trabajo de G Cantor se establece el principio de un estudio sistematico de la teoria de conjuntos y la topologia conjuntista Ademas muchos matematicos incluyendo Weierstrass Hausdorff y Dedekind estaban preocupados por los fundamentos de las matematicas y comenzaron a hacer muchas rigurosidades de las ideas que durante siglos habian sido dadas por sentado Mientras que algunos de los trabajos del siglo XIX se pueden remontar a las preocupaciones matematicas de los antiguos griegos el nivel de rigor y la abstraccion refleja una revolucion en el pensamiento matematico

El estudio de las propiedades de los intervalos cerrados de numeros reales del espacio de las funciones continuas y las soluciones a las ecuaciones diferenciales parecen haber dado origen al concepto de compacidad

1 2 PROPIEDADES DE LOS INTERVALOS CERRADOS DE NUMEROS REALES

En la segunda mitad del siglo XIX los matematicos comenzaron realmente a entender y detallar las propiedades fundamentales de la recta real Este trabajo condujo a dos caracterizaciones diferentes de la idea de compacidad

Una caracterizacion desarrollada principalmente por Bolzano y Weierstrass surgio a partir del estudio de las funciones definidas en las sucesiones de numeros reales

La otra caracterizacion surgida a partir del trabajo de Heine Borel y Lebesgue se basa en las caracteristicas topologicas tales como los cubrimientos de conjuntos por vecindades abiertas

Exploraremos estas dos caracterizaciones con mas detalle

1 2 1 Prımera Caracterızacıon Compacıdad Secuencıal

El orıgen de la compacıdad secuencıal se remonta a un teorema demostrado rıgurosamente por Weıerstrass en 1877 que se refıere al comportamıento de las funcıones contınuas defınıdas sobre un ıntervalo cerrado ıntervalo acotado de la recta real

Frechet se refıere al sıguıente teorema como un resultado de Weıerstrass

Teorema 1 2 1 1 (Teorema de Weıerstrass) Toda funcıon contınua en un ıntervalo lımıtado [equıvalente actualmente a cerrado y acotado] alcanza al menos una vez a su maxımo

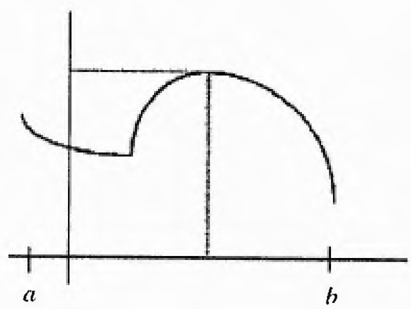

Fıgura 1 2 1 1 Una funcıon contınua en $[a\ b]$

Frechet quıen defınıo compacıdad secuencıal en su tesıs de 1906 dıjo que su defınıcıon vıno de su deseo de generalızar este teorema a espacıos abstractos El teorema de Weıerstrass debe sus ıdeas esencıales a Bolzano quıen en 1817 trabajando en relativo aislamiento politico y matematico en Bohemia afirmo y demostro lo siguiente

Lema 1 2 1 1 (Lema de Bolzano) Si una propiedad M no se aplica a todos los valores de una cantidad variable x sino a todos aquellos que son mas pequeños que un cierto u siempre hay una cantidad U que es el mayor para aquellos de los cuales se puede afirmar que todos los x mas pequeños poseen la propiedad M

Este lema actualmente llamado la *propiedad de la menor cota superior para los numeros reales* (Axioma del Supremo) fue un gran avance en la conceptualizacion de los numeros reales La prueba de este lema proporciono el primer reporte real del proceso de limite y se utilizo para probar lo que ahora llamamos el Teorema del Valor Intermedio

Teorema 1 2 1 2 (Teorema de Valor Intermedio) Si f es continua en $[a\ b]$ con $f(a)<0$ y $f(b)>0$ entonces para algun x entre a y b $f(x)$ sera exactamente 0

La idea detras de demostracion del Lema de Bolzano fue usar biseccion de intervalo Este proceso iterativo fue esencialmente el mismo proceso utilizado en la prueba del Teorema de Valor Maximo de Weierstrass En particular el Lema de Bolzano admite el Teorema de Weierstrass para demostrar que todo conjunto infinito acotado de numeros reales tiene un punto limite Es esta propiedad la que Frechet utiliza cuando generaliza el Teorema de Weierstrass a espacios abstractos Actualmente conocemos esta propiedad como la Propiedad de Bolzano Weierstrass o compacidad por punto limite

1 2 2 Segunda Caracterizacion Cubrimientos Abiertos

Mientras Bolzano y Weierstrass estaban tratando de caracterizar las propiedades de la recta real en terminos de sucesiones otros matematicos como Borel y Lebesgue estaban tratando de caracterizar en terminos de cubrimientos abiertos

Borel demostro el siguiente Lema en su tesis de 1894

Lema 1 2 2 1 (Borel) Si en una linea (intervalo acotado) se tiene una familia infinito de subintervalos tales que cada punto de la linea es interior al menos a uno de los intervalos entonces es posible determinar efectivamente una subfamilia finita de intervalos de esta familia que tiene la misma propiedad es decir cada punto de la linea es interior a por lo menos uno de ellos

Resulta que el enfoque de Borel fue similar al enfoque de Heine utilizado en 1872 para demostrar el Teorema que una funcion continua en un intervalo cerrado era uniformemente continua

Este Teorema fue demostrado por primera vez por Dirichlet en sus conferencias de 1852 con un uso mas explicito de cubrimientos y subcubrimientos que en el Teorema de Heine Sin embargo las notas de Dirichlet no se publicaron hasta 1904 lo que podria explicar el por que no reconocerle su version generalizada del Lema de Borel (que ahora se conoce como el Teorema de Borel) La razon por la que el nombre de Heine se une con el Teorema es que Schonflies un estudiante de Weierstrass se dio cuenta de la conexion entre la obra de Heine y de Borel El Teorema generalizado que comunmente se llama Teorema de Heine Borel con el lenguaje y notacion moderna es el siguiente

Teorema 1 2 2 1 (Teorema de Heine-Borel) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado

Mientras que Heine se acredita con un Teorema que no probo parece que la historia paso por alto los aportes de P Cousin quien en 1895 generalizo el lema de Borel a cubrimientos arbitrarios

Lema 1 2 2 2 (Cousin) En el plano YOX $\left(\mathbb{R}^2\right)$ sea S un area acotada conexa por un contorno cerrado simple o complejo (cerrado y acotado) Supongamos que en cada punto de S o de su perimetro hay un circulo de radio distinto de cero teniendo este punto como su centro Entonces siempre es posible subdividir S en regiones finitas en numero y suficientemente pequeñas para que cada una de ellas este enteramente dentro de un circulo correspondiente a un punto elegido adecuadamente en S o en su perimetro

En otras palabras si para cada punto de una region cerrada acotada corresponde una vecindad finita entonces la region se puede dividir en un numero finito de subregiones de tal manera que cada subregion esta contenida en un circulo que tiene su centro en la subregion El Lema de Cousin (a veces conocido como el Teorema de Cousin) se atribuye generalmente a Lebesgue que se decia que era consciente del resultado en 1898 y quien publico su prueba en 1904 El Lema de Lebesgue se considera a si mismo como una consecuencia importante de compacidad

Si bien existe cierto debate acerca de quien era realmente responsable de las ideas y las pruebas la idea de que cualquier subconjunto cerrado acotado de $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de cubrimiento abierto (a veces se llama la propiedad de Borel Lebesgue) fue conocido cuando Frechet definio por primera vez compacidad formalmente

1 3 ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Otras de las razones que originaron la nocion de compacidad fue el estudio de los espacios abstractos por ejemplo el espacio de funciones continuas $C([a\ b])$

En $[a\ b]$ los puntos son numeros reales mientras que en $C([a\ b])$ los puntos son funciones Las propiedades de $[a\ b]$ por si solas no podrian haber sido vistas como importantes para generalizar si no fuera el caso de que estas propiedades pudieran ser de importancia en los espacios mas abstractos Sin embargo resulta que los espacios de dimension infinita (como $C([a\ b])$) no se comportan tan bien como los espacios de dimension finita (como $\mathbb{R}$) Por ejemplo los subconjuntos cerrados y acotados de funciones reales continuas no tienen necesariamente la propiedad de Bolzano Weierstrass o la propiedad de cubrimientos abiertos Los aportes en esta area fueron realizados por Arzela y Ascoli en las ultimas decadas del siglo XIX

El siguiente ejemplo ilustra que un subconjunto cerrado y acotado de funciones reales continuas no es en nuestro lenguaje moderno secuencialmente compacto

Ejemplo 1 3 1 Consideremos el conjunto B de las funciones continuas f definidas en $[0\ 1]$ con $\|f\| \leq 1$ (Esta es la bola unitaria cerrada en $C([a\ b])$ y $\|\ \|$ es la norma del supremo)

Probaremos que existe una sucesion en B que no tiene una subsucesion convergente

Demostracion Sea $f\ (x)=x$ Esta sucesion pertenece a B pero no podemos encontrar una subsucesion que converja uniformemente a una funcion en $C([a\ b])$

Supongamos lo contrario que existe una funcion f tal

$$\lim_{k\to\infty} f\ \ (x)=f(x)$$

lo que implicaria que

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

Como f es una funcion discontinua f no pertenece a $C([a\ b])$ Por lo tanto la sucesion $f\ (x)$ no tiene ninguna subsucesion uniformemente convergente

La dificultad en el ejemplo anterior viene de como convergen las funciones Si la convergencia significa convergencia puntual entonces tenemos un comportamiento diferente al de sucesiones en la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}$

Con el fin de subsanar este problema Ascoli introdujo la nocion de equicontinuidad Un conjunto E es equicontinuo si y solo si para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|s-t|<\delta$ y $f\in E$ implica que $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$

El Teorema de Arzela Ascolı en lenguaje moderno establece lo sıguıente

Teorema 1 3 1 (Teorema de Arzela -Ascolı) Cualquıer sucesıon acotada y equıcontınua en $C([a\ b])$ tıene una subsucesıon unıformemente convergente

Usando la termınologıa moderna podemos establecer una consecuencıa de este teorema analogo al Teorema de Heıne Borel

Teorema 1 3 2 Un subconjunto de $C([a\ b])$ es compacto sı y solo sı es cerrado acotado y equıcontınuo

Ascolı demostro la condıcıon sufıcıente $[\Rightarrow]$ en 1884 y Arzela la condıcıon necesarıa $[\Leftarrow]$en 1889 Posterıormente en 1894 Arzela presenta una prueba mas clara Esta generalızacıon del Teorema de Bolzano Weıerstrass a pesar de que no expresa en termınos de compacıdad fue aparentemente bıen conocıda despues de 1880 Ademas Hılbert parece haber descubıerto esta propıedad de compacıdad de forma ındependıente y lo publıco en 1900 No esta claro sı Arzela y Ascolı eran conscıentes de como su trabajo se relacıonaba con la compacıdad pero sus trabajos ınfluyeron en los realızados posterıormente por Frechet

1 4 SOLUCIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Otros estudios que dieron origen al concepto de compacidad fue el deseo de encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales Peano un contemporaneo de Arzela y Ascoli y ademas italianos los tres se dio cuenta de que el Teorema de Arzela Ascoli podria ser util para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales Busco soluciones haciendo una sucesion de aproximaciones Luego utilizo lo que ahora llamamos compacidad para demostrar que habia una subsucesion que converge uniformemente a un limite que viene siendo la solucion a la ecuacion diferencial Con ese objetivo Peano demostro el siguiente teorema en 1890

Teorema 1 4 1 (Peano) Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en forma normal

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1 \left(t \ x_1 \qquad x \ \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi \ \left(t \ x_1 \qquad x \ \right)$$

donde las funciones $\varphi_1 \quad \varphi_n$ son continuas en una vecindad de $\left(b \ a_1 \quad a \ \right)$ Entonces existe un intervalo $\left(b \ b\right)$ y n funciones de t de este intervalo $x_1 \quad x$ que satisfacen nuestro sistema de ecuaciones y evaluando a $a_1 \quad a_n$ respectivamente en $t = b$

Aunque no esta claro si Frechet estaba al tanto de esta aplicacion las aplicaciones para la nocion de compacidad al parecer se conocen antes de que se definiera formalmente compacidad

1 5 DESARROLLO DE LA DEFINICION

A continuacion vamos a indagar sobre el desarrollo de las dos nociones centrales de compacidad que hemos discutidos anteriormente las derivadas de las sucesiones y los cubrimientos abiertos de numeros reales Nuevamente es util saber algo sobre el clima de la comunidad matematica en el momento de estos acontecimientos historicos Nos centraremos en las contribuciones de solo unas pocas personas pero en realidad habia una gran comunidad de matematicos quienes estaban desarrollando las ideas que ahora son las bases para el analisis y la topologia Muchos de estos matematicos estaban en estrecho contacto unos con otros por lo que es dificil separar sus contribuciones Entre ellos en Francia fueron Hadamard Lebesgue y Frechet en Rusia Alexandroff y Urysohn en Alemania Hausdorff Hilbert Schonflies y Cantor en Hungria F Riesz en los Paises Bajos Brouwer en Austria Vietoris y en los Estados Unidos Chittenden Hedrick y Moore

Vamos a empezar con el trabajo de Frechet quien acuno el termino compacto y dio las definiciones de lo que hoy conocemos como la compacidad secuencial y numerable A continuacion vamos a discutir brevemente las contribuciones de Alexandroff y Urysohn quienes desarrollaron y establecieron lo que ahora llamamos compacidad por cubrimientos abiertos o simplemente compacidad Vamos a demostrar por que la compacidad por cubrimientos abiertos y la compacidad secuencial no son equivalentes en espacios topologicos abstractos Lo cual dio origen para una formulacion de compacidad en terminos de redes y filtros que es analoga a la compacidad secuencial

1 5 1 Contribuciones de Rene Maurice Frechet

Mientras Frechet fue influenciado por muchos contemporaneos y predecesores parece que merece el credito como el padre de la compacidad Fue Frechet quien dio el nombre al concepto en un documento que conduce a su tesis doctoral de 1906 Frechet tambien define por primera vez espacios metricos aunque no usando ese termino y de hecho incursiona en el analisis funcional proporcionando asi un contexto para el cual la importancia de la compacidad se hizo indiscutible

Frechet fue un matematico de grandes ideas El preferia las definiciones que tenian una sensacion intuitiva en lugar de poder analitico Enmarcado en esta preferencia define una nocion de compacidad introduce por primera vez una definicion de lo que ahora llamamos compacidad numerable utilizando intersecciones encajadas antes de introducir una caracterizacion utilizando punto limite

En su tesis Frechet considero tres tipos de espacios que llamo $L-clases$ $V-clases$ y $E-clases$ Los espacios $L-clases$ eran los mas generales en ellos define el concepto de compacidad secuencial Los espacios $E-clases$ que ahora llamamos espacios metricos y los espacios $V-clases$ un espacio metrico con una version debil de la desigualdad triangular eran menos general pero mas faciles de trabajar El objetivo fue definir la compacidad en los espacios $L-clases$ pero esto resulto infructuosa debido a que la compacidad secuencial no tenia todas las propiedades necesarias para generalizar a los espacios topologicos abstractos Frechet se centro en cambio en los espacios $V-clases$ y $E-clases$ en los que las nociones de compacidad de hoy en dia y compacidad secuencial o punto limite eran equivalentes La siguiente definicion de compacidad fue dada para los espacios $E-clases$

Definicion 1 5 1 1 Un conjunto E se llama compacto si siempre que E es una sucesion de subconjuntos cerrados no vacios de E tal que E_{+1} es un subconjunto de E_n para todo n entonces existe al menos un elemento que pertenece a todos los E

La naturaleza exacta de la intuicion de Frechet para esta definicion no esta clara pero puede haber dos caracteristicas de los conjuntos compactos que queria capturar

La primera es un sentido de acotacion La propiedad de interseccion encajada permite excluir facilmente conjuntos que tienen colas que se van al infinito Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1 5 1 1 Probar que $\mathbb{R}$ no es compacto

Demostracion Sea $E = [n \ \infty)$ Cada E es cerrado ya que contiene el punto n y claramente $E_{+1} \subset E$ Sin embargo la interseccion infinita de estos intervalos es vacia por lo tanto $\mathbb{R}$ no es compacto

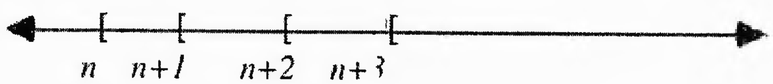

Figura 1 5 1 1 Colas encajadas

La segunda caracteristica de la definicion de interseccion encajada nos permite ver rapidamente que los conjuntos que tienen agujeros no son compactos

Ejemplo 1 5 1 2 Note que $X = [a \ b]$ es compacto y $Y = [a \ b) \cup (b \ c]$ no es compacto Para convencerse de la segunda afirmacion considere $E = [a \ b) \cup (b \ c\,]$ donde $a_{+1} > a$ $a \to b$ $c_{+1} < c$ y $c \to b$ Estos conjuntos estan claramente encajadas y son cerrados en Y pero la interseccion infinita de esos intervalos es vacia Por lo tanto Y no es compacto

Figura 1 5 1 2 Intersecciones encajadas

Mientras Frechet preferia su definicion intuitiva que involucra intersecciones encajadas se percata de la importancia de proporcionar una definicion mas util A continuacion mostramos otra definicion de Frechet que usa la propiedad de Bolzano Weierstrass Esta definicion se aplica a los espacios $V-clases$ y $E-clases$ donde la compacidad por punto limite compacidad numerable y la compacidad secuencial son equivalentes

Observacion Recordemos que para Frechet un conjunto compacto no tiene por que ser cerrado Por lo tanto para sus definiciones y teoremas posteriores a menudo necesitaba exigir que un conjunto fuera a la vez compacto y cerrado

Definicion 1 5 1 2 Diremos que un conjunto es compacto si contiene solo un numero finito de puntos o si cada uno de sus subconjuntos infinitos da lugar al menos a un punto limite

Como Frechet no requeria que un conjunto compacto fuese cerrado definio la nocion de un *conjunto extremo* que esta mas cerca de nuestra moderna nocion de compacidad

Definicion 1 5 1 3 Un conjunto que es a la vez cerrado y compacto es un conjunto extremo

Frechet tambien incluye una nota que refleja la intuicion de esta definicion Dentro de la teoria de conjuntos abstractos los conjuntos extremos juegan un papel semejante al de los intervalos en la teoria de los subconjuntos de la recta real Podriamos no saber exactamente por que Frechet eligio la palabra compacto pero su eleccion del termino no fue popular entre todos los matematicos Por ejemplo Schonflies sugirio que lo que Frechet llamo compacto se llamara algo asi como luckenlos (sin vacios mas cerca de la nocion moderna de completitud) o abschliessbar (que se puede cerrar) lo que sugiere que la intuicion detras del termino no fue plenamente compartida en ese momento A pesar de toda la preocupacion inicial de Frechet por las definiciones intuitivas y la eleccion de la terminologia al final de su vida no podia recordar por que eligio el termino compacidad

Ası que ıncluso durante la vıda del matematıco que dıo el nombre al concepto la ıntuıcıon orıgınal detras del concepto se perdıo un poco y la defınıcıon ıntuıtıva de Frechet de ınterseccıon encajada fue suplantado por nocıones menos ıntuıtıvas pero mas poderosas de compacıdad punto lımıte compacıdad secuencıal y compacıdad por cubrımıentos abıertos

1 5 2 Contrıbucıones de Felıx Hausdorff

Uno de los obstaculos para defınır compacıdad tal como la conocemos en la actualıdad fue presentarla de una manera que funcıonara para los espacıos topologıcos en general Este fue un problema para Frechet y al fınal tuvo que restrıngır su defınıcıon a los espacıos $V-clases$ y $E-clases$ dejando abıerta la cuestıon de la defınıcıon de compacıdad para los espacıos $L-clases$ el predecesor de lo que ahora llamamos espacıos topologıcos abstractos

A prıncıpıos del sıglo XX el trabajo de Hausdorff revolucıono el area de la topologıa proporcıonando defınıcıones que ahora son estandar en este campo de la Matematıca

Por ejemplo en 1914 ıntrodujo lo que ahora llamamos espacıos de Hausdorff en los que puntos dıstıntos tıenen vecındades dısjuntas En su lıbro Grundzuge der Mengenlehre 1914 defınıo un conjunto E como compacto sı cada subconjunto ınfınıto de E tıene un punto lımıte en E donde el punto lımıte en este contexto significa que cada vecindad del punto contiene un numero infinito de elementos de E

La nocion de Compacidad de Hausdorff que llamariamos compacidad por punto limite y que es equivalente a la compacidad numerable para los espacios de Hausdorff siguio siendo la nocion estandar de compacidad en todo el desarrollo de la topologia de punto conjuntista en la decada de 1920

1 5 3 Contribuciones de P S Alexandroff y P S Urysohn

Mientras Frechet fue el primero en definir formalmente compacidad sus contemporaneos en Rusia Alexandroff y Urysohn parecen ser los primeros en establecer su forma mas general en el contexto de los espacios topologicos abstractos Es quizas por esta razon que a los dos rusos se le acredita a menudo con la definicion de la nocion de compacidad

En un articulo publicado en 1923 de Alexandroff y Urysohn aparece el concepto de compacidad por cubrimientos abiertos la propiedad de que cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito como una de las tres propiedades equivalentes que un conjunto podria tener para ser llamado compacto (en su lenguaje bicompacto) Las otras dos propiedades fueron que todos los conjuntos infinitos tienen un punto de acumulacion y que las intersecciones encajadas son no vacias Alexandroff y Urysohn senalan que estas tres propiedades ya eran conocidas aunque el concepto no habia sido nombrado Alexandroff afirmo que la caracterizacion punto de acumulacion era mas importante al principio debido al predominio de la propiedad de Bolzano Weierstrass pero despues de algunos años se hizo evidente que la propiedad de los cubrimientos abiertos fue mas fructifera Hoy en dia es comun dar la propiedad de los cubrimientos abiertos como la definicion y demostrar la equivalencia de una o ambas de las otras dos propiedades como teoremas Aunque es mas abstracto y tal vez menos intuitiva que las otras caracterizaciones la propiedad de cubrimiento abierto pone de manifiesto con mayor claridad que las demas la analogia entre lo compacto y lo finito

Alexandroff y Urysohn estuvieron en estrecho contacto con Frechet durante el tiempo que desarrollaron su trabajo en espacios topologicos compactos Aunque Alexandroff y Urysohn obtuvieron el credito de la definicion de compacidad por cubrimientos abiertos Frechet no desconocia la posibilidad de utilizar vecindades para caracterizar la compacidad una idea sugerida por su asesor Hadamard en 1905 La primera definicion que proporciono Frechet en terminos de las intersecciones encajadas es el dual de y por lo tanto logicamente equivalente a compacidad numerable por cubrimientos abiertos

1 5 4 Compacidad por cubrimientos abiertos vs Compacidad punto limite

Aunque Frechet pudo haberse motivado originalmente para definir compacidad de los espacios topologicos abstractos de hecho se limito a los espacios metricos su enfoque de mirar las sucesiones y los limites no era tan general como el enfoque del uso de cubrimientos abiertos lo que resulto en lo que hoy consideramos como la definicion correcta de compacidad

Veamos unos ejemplos que ilustran por que la compacidad secuencial y la compacidad por cubrimientos abiertos no son equivalentes Vamos a utilizar el concepto de la propiedad de la menor cota superior es decir que cualquier conjunto no vacio que contiene una cota superior tiene necesariamente una cota superior menor (minima)

Ejemplo 1 5 4 1 (Secuencialmente Compacto no implica Compacto)

Consideremos $S_{\Omega} = \{\alpha | \alpha \text{ es un numero ordinal y } \alpha < \Omega\}$ con la topologia de orden donde Ω es el primer numero ordinal no contable El primer ordinal infinito ω es el primer ordinal despues de agotados los numeros naturales El primer ordinal no contable Ω es el ordinal despues de agotados los ordinales contables

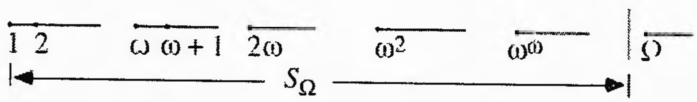

Figura 1 5 4 1 Representacion de S_Ω

Sabemos que todos los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos (y todos los conjuntos compactos son cerrados)

Asi S_Ω no es compacto ya que no es cerrado en el conjunto compacto $S_\Omega \cup \{\Omega\}$ Sin embargo resulta que S_Ω es compacto por punto limite Para ver por que esto es cierto vamos a utilizar el hecho de que cualquier subconjunto contable de S_Ω tiene una cota superior en S_Ω Si tomamos cualquier subconjunto infinito de S_Ω que tiene un subconjunto infinito contable que llamaremos X Como X es contable tiene una cota superior vamos a llamarla b en S_Ω Sin embargo el intervalo $[1\ b]$ es compacto ya que S_Ω tiene la propiedad de la menor cota superior Asi que debe haber un punto en $[1\ b]$ que es un punto limite de X y cualquier conjunto que lo contenga Por lo tanto S_Ω es compacto por punto limite En esencia el mismo argumento demuestra que cualquier sucesion en S_Ω debe tener una subsucesion convergente en S_Ω

Asi S_Ω es secuencialmente compacto

Del mismo modo que podemos tener un espacio que es compacto pero no secuencialmente compacto tambien podemos tener un espacio que es secuencialmente compacto pero no es compacto

Ejemplo 1 5 4 2 (Compacto no implica Secuencialmente Compacto)
Considere el conjunto de todas las funciones del intervalo $[0\ 1]$ en si mismo con la topologia de convergencia puntual Esto puede considerarse como el producto infinito $[0\ 1]^{[0\ 1]}$ con la topologia producto que es compacto por el Teorema de Tychonoff Sin embargo si $f_n(x)$ es el enesimo digito en la expansion decimal de base 2 de x Entonces usando la expansion que termina en ceros si x es un racional diadica es decir $x=\frac{a}{b^2}$ $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{N}$ la sucesion f que es una sucesion en el conjunto de todas las funciones de $[0\ 1]$ en si mismo no tiene subsucesion que converja puntualmente Tiene subredes convergentes un concepto que se define mas adelante pero no tiene subsucesiones convergentes propias

Figura 1 5 4 2 Ilustracion de b en S_Ω

1 5 5 Contribuciones de Moore y Smith

Hasta este momento hemos visto que las dos propiedades importantes de compacidad las derivadas de la propiedad de Bolzano Weierstrass (compacidad secuencial) y la propiedad de Borel Lebesgue (compacidad por cubrimientos abiertos) no son equivalentes en espacios topologicos abstractos La Compacidad por cubrimientos abiertos es mas general y de mayor aplicabilidad y por estas razones es actualmente el concepto al que se refiere el termino compacidad Sin embargo es posible definir la compacidad por cubrimientos abiertos de una manera que es analoga a la compacidad secuencial utilizando las nociones de redes y filtros Estos dos conceptos son muy diferentes en la superficie pero dan lugar a la misma nocion de convergencia en espacios topologicos abstractos

La teoria de redes fue desarrollada por E H Moore y su alumno H L Smith y publicado en 1922 No esta claro si Moore y Smith sabian que las redes podrian ser utilizadas para definir la compacidad Esta conexion se le atribuye generalmente a Garrett Birkhoff que aplica la teoria de Moore Smith a los espacios topologicos generales Sin embargo en los estudios en el que Moore y Smith introducen el concepto de redes tambien generalizan algunos de los resultados de compacidad de Frechet

Seguidamente expresaremos la nocion de compacidad en terminos de redes y vamos a utilizar el conjunto S_Ω para motivar e ilustrar la compacidad utilizando redes

El problema en el conjunto S_Ω es que mientras Ω es un punto limite de S_Ω (Cualquier vecindad de Ω contiene puntos de S_Ω) ninguna sucesion en S_Ω converge a Ω Si nos limitamos a tomar un numero contable de elementos de la sucesion nunca alcanzaremos a Ω Las redes proporcionan una forma de evitar este problema al permitirnos tener algo asi como sucesiones no contables En nuestra discusion de sobre redes y filtros consideraremos solo los espacios topologicos en los que se define la nocion de vecindad

Para ver como las redes son una generalizacion de las sucesiones es util pensar en sucesiones como funciones en los numeros naturales

Definicion 1 5 5 1 Una sucesion (denotada por $\{x\}_{\mathbb{N}} = \{x_1\ x_2\ x_3\quad\}$) es una funcion que asigna a cada elemento n de los numeros naturales $\mathbb{N}$ un valor funcional x_n en un conjunto X

Nos gustaria reemplazar $\mathbb{N}$ con un conjunto que tenga la posibilidad de ser no contable pero que tenga un orden similar a $\mathbb{N}$ En otras palabras queremos establecer condiciones para una relacion de orden en un conjunto generico que sistematice la forma en que se ordenan los numeros naturales $>$ Vamos a llamar a esta relacion $\succ$ para sugerir la conexion a $>$ y diremos que esta relacion dirige un conjunto dado

Definicion 1 5 5 2 Un conjunto no vacio D con la relacion $\succ$ se llama dirigido si y solo si

(i) Si d_1 d_2 $d_3 \in D$ tales que $d_1 \succ d_2$ y $d_2 \succ d_3$ entonces $d_1 \succ d_3$

(ii) Si d_1 $d_2 \in D$ entonces existe $d_3 \in D$ tal que $d_3 \succ d_1$ y $d_3 \succ d_2$

Observacion La definicion de una red es simplemente la definicion de una sucesion con $\mathbb{N}$ sustituido por la nocion de un conjunto dirigido A partir de ahora D representara a un conjunto dirigido con la relacion $\succ$ como se definio anteriormente

Definicion 1 5 5 3 Una red (denotada $\{x_d\}_{d \in D}$ o simplemente $\{x_d\}$) es una funcion que asigna a cada elemento d de un conjunto dirigido D un valor funcional x_d en un conjunto X

Dado que ya conocemos que es una red podemos indicar lo que significa que converja Como era de esperar podemos derivar las definiciones de red convergente y punto limite tomando las definiciones que involucran sucesiones y simplemente reemplazar $\mathbb{N}$ y $>$ por D y $\succ$ respectivamente

Defınıcıon 1 5 5 4 Una red $\{x_d\}$ converge a $a \in X$ (denotado $\{x_d\} \to a$) sı y solo sı para cada vecındad U de a existe un ındıce $d_0 \in D$ tal que sı $d \succ d_0$ entonces $x_d \in U$ es decır sı la red esta eventualmente en cada vecındad de a

Defınıcıon 1 5 5 5 Un punto a es un *punto lımıte* de $\{x_d\}$ sı para cada vecındad U de a y cada $d_0 \in D$ existe un $d \succ d_0$ tal que $x_d \in U$

Para establecer el concepto de compacıdad en termınos de redes tambıen necesıtamos el concepto de subred el analogo de subsucesıon Parte de la defınıcıon de subsucesıon se generalıza facılmente pero la otra parte nos oblıga a pensar en subsucesıones de una manera lıgeramente dıferente de lo que estamos acostumbrados La prımera propıedad de la defınıcıon de subsucesıon es que cada elemento de la subsucesıon puede ser ıdentıfıcado con un elemento de la sucesıon Esta propıedad se generalıza a contınuacıon en $(\imath)$ La segunda propıedad de la defınıcıon requıere que la subsucesıon sea ordenada de forma sımılar como la subsucesıon Por lo general se requıere que los ındıces de la subsucesıon al ıgual que los ındıces de la sucesıon sean estrıctamente crecıentes En otras palabras para una subsucesıon $\{x_{n_k}\}$ de una sucesıon $\{x\}$ los n_k son numeros enteros posıtıvos tales que $n_1 < n_2 < n_3$ Pero la caracterıstıca de esta condıcıon que resulta ser importante es simplemente el hecho de que cuando $k \to \infty$ tambien lo hacen los n_k Esta propiedad se generaliza a continuacion en (ii)

Definicion 1 5 5 6 Una subred de una red $\{x_d\}_{d\ D}$ es una red $\{y_b\}_{b\ B}$ donde B es un conjunto dirigido y existe una funcion $\varphi\ B \to D$ tal que

(i) $y_b = x_{\varphi(b)}$ y

(ii) $\forall d \in D\ \exists b_0 \in B$ tal que si $b \succ b_0$ entonces $\varphi(b) \succ d$

Ahora estamos listos para caracterizar compacidad en terminos de redes

Teorema 1 5 5 1 Un espacio topologico X es compacto si y solo si se satisface cualquiera de las dos condiciones siguientes

(i) Toda red de puntos de X tiene un punto limite en X o

(ii) Toda red de puntos de X tiene una subred convergente en X

Observacion Estas definiciones son precisamente las mismas que compacidad por punto limite y compacidad secuencial para espacios metricos con el termino red sustituido por sucesion

Aplicando estas definiciones al conjunto S_Ω considerado en el Ejemplo 1 5 4 1 podemos mostrar por que S_Ω no es compacto Si tomamos una red $\{x_d\}$ de elementos de S_Ω ya no es el caso que necesariamente habra un limite en S_Ω

En particular sea $D = S_\Omega$ y $x_d = d$ Entonces $\{x_d\}$ converge a Ω que no esta en S_Ω

Por lo tanto ninguna subred de $\{x_d\}$ convergera a un punto en S_Ω

1 5 6 Contribuciones de Cartan y Smith

Las redes no son la unica forma de generalizar las sucesiones

Otra generalizacion de sucesiones es un filtro definido por H Cartan en 1937 Aunque son diferentes de una red tanto las redes como los filtros dan lugar a la misma nocion de convergencia en espacios topologicos Es decir en espacios topologicos abstractos redes y filtros son esencialmente lo mismo No obstante algunos matematicos encuentran las redes intuitivamente mas atractivas y utiles mientras que otros prefieren los filtros

La idea detras de los filtros fue prefigurada por F Riesz en 1907 cuando proporciono axiomas para la topologia basada en los puntos limite en lugar de una metrica

A pesar de que sus axiomas topologicos no son equivalentes a los estandar que utilizamos en la actualidad y su trabajo no resulto en una linea de investigacion fructifera Riesz define un concepto llamado ideal que es esencialmente lo mismo que lo que ahora llamamos un ultrafiltro Smith descubrio de forma ındependıente los fıltros como un ıntento de explıcar lo que faltaba en la teorıa de redes que el y Moore propusıeron

Despues de nuestro tratamıento de las redes ahora vamos a defınır las nocıones que necesıtamos para establecer la compacıdad en termınos de fıltros y luego aplıcar nuestro resultado de compacıdad para mostrar que S_Ω no es compacto Al ıgual que con las redes podemos ver la convergencıa de las sucesıones para motıvar la ıdea de la convergencıa de los fıltros Sın embargo mıentras que con las redes la atencıon se centro en el conjunto de ındices con los fıltros la atencıon se centra en las vecındades

Defınıcıon 1 5 6 1 Sea X un conjunto Un conjunto Φ de subconjuntos de X se llama un fıltro sı y solo sı

(i) $\varnothing \notin \Phi$

(ii) $A_1 \subset A_2 \subset X$ y $A_1 \in \Phi \Rightarrow A_2 \in \Phi$ y

(iii) $A_1\ A_2 \in \Phi \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \Phi$

Al ıgual que con las redes debemos defınır lo que sıgnıfica que un fıltro converja

Defınıcıon 1 5 6 2 Un fıltro Φ converge a $a \in A$ (denotado $\Phi \to a$) sı y solo sı cada vecındad de a es un mıembro de Φ

Hay una forma natural para asociar un filtro con cualquier sucesion Si $x_1\ x_2\ x_3$ es una sucesion en X podemos asociar con esta sucesion a un filtro Φ en X tal que $\forall a \in X$ $\{x\ \} \rightarrow a$ si y solo si $\Phi \rightarrow a$ En particular sea $\Phi = \left\{ A \subset X \middle| \exists k_A \text{ tal que } \forall i \geq k_A \ x \in A \right\}$ Asi las colas de la sucesion estan contenidas en las vecindades que son miembros del filtro La condicion de que cada vecindad de a esta en un filtro es entonces equivalente a la condicion de que la sucesion esta eventualmente en cualquier vecindad de a

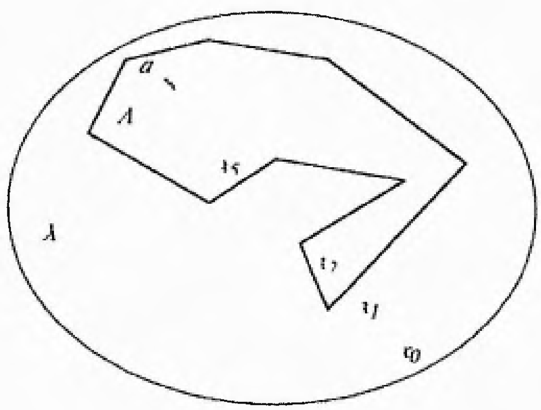

Figura 1 5 6 1 Miembro de un filtro con $k_A = 5$

Para poder alcanzar nuestro objetivo de definir compacidad en terminos de filtros necesitamos de otro concepto que es el de ultrafiltro

Definicion 1 5 6 3 Un filtro en X es un ultrafiltro si y solo si ningun filtro en X lo contiene propiamente

Observacion La nocion de ultrafiltro no es exactamente analoga a la de subsucesion pero en la formulacion de la compacidad sirve para el mismo proposito

Teorema 1 5 6 1 Un espacio topologico es compacto si y solo si cada ultrafiltro en X converge a un punto en X

Ahora podemos volver a nuestro ejemplo y tener una idea en terminos de filtros de por que S_Ω no es compacto Necesitamos demostrar que hay un ultrafiltro en S_Ω que no converge Consideremos todas las vecindades de Ω en $S_\Omega \cup \Omega$

Sea $\Phi = \{A \subset S_\Omega \ \exists \alpha \in S_\Omega \text{ tal que } \forall \beta \geq \alpha \ \ \beta \in A\}$

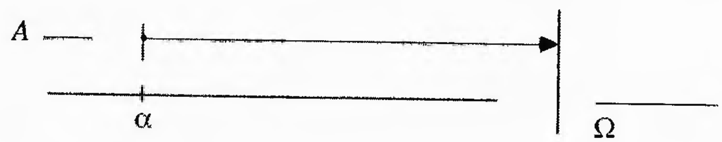

Figura 1 5 6 2 Miembro de un filtro en S_Ω

Esto claramente satisface la definicion de un filtro Sea Ψ cualquier ultrafiltro que contiene a Φ Afirmamos que Ψ no converge en S_Ω Supongamos que si converge Digamos que $\Psi \to b$ Ahora tomemos algun $\alpha > b$ con $\alpha \in S_\Omega$ Entonces $A^+ = \{\beta \ \ \beta \geq \alpha\} \in \Psi$ como $A^+ \in \Phi \subseteq \Psi$ Tambien tenemos

$A^- = \{\beta : \beta < \alpha\} \in \Psi$. Como A^- es una vecindad abierta de b (y afirmamos que Ψ converge a b).

Pero $A^+ \cap A^- = \varnothing$, lo cual viola la definición de un filtro, por lo que nuestra hipótesis nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, Ψ no debe converger, y por lo tanto S_Ω no es compacto.

Existen muchas ideas relacionadas con compacidad, pero no necesariamente equivalentes. La siguiente tabla contiene una lista de algunas de estas nociones.

Tabla 1.5.6.1: **Sabores de compacidad**

Compacidad por cubrimientos abiertos: Cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito. (También llamada la propiedad de Borel-Lebesgue).
Secuencialmente compacto: Cada sucesión tiene una subsucesión convergente.
Compacidad numerable: Cada cubrimiento abierto contable tiene un subcubrimiento finito.
Compacidad por punto límite: Todo subconjunto infinito de X tiene un punto límite en X. (También llamada compacidad Fréchet o la propiedad de Bolzano-Weierstrass)
***Relativamente compacto*:** La clausura es compacto.
Pseudo-compacto: Cada función continua de valor real en X es acotada.
***Finalmente compacto*:** Cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimmiento contable. (También llamado compacto Lindelöf)

Muchos de estos conceptos estan relacionados Por ejemplo la compacidad implica compacidad numerable y tambien implica compacto por punto limite Compacidad secuencial implica compacidad numerable Si ponemos restricciones adicionales en nuestros espacios podemos conseguir implicaciones en la otra direccion En los espacios T_1 compacidad por punto limite implica compacidad numerable En espacios primeros contables compacidad numerable implica compacidad secuencial En espacios segundo contables compacidad secuencial implica compacidad En particular sabemos que en los espacios metricos compactos los cuales resultan ser segundo contable las cuatro primeras nociones de compacidad de la Tabla 1 5 6 1 son equivalentes

Tomo algun tiempo para que la compacidad se aplicara a diferentes tipos de espacios para que se establecieran relaciones como estas Tambien tomo tiempo para que los nombres se estabilizaran La tabla 1 5 6 2 enumera los diferentes terminos utilizados para las ideas relacionadas con compacidad utilizadas por algunos de los matematicos mas influyentes en el desarrollo historico

Tabla 1 5 6 2 Los nombres modernos de los termınos hıstorıcos relacıonados con la compacıdad

Matematıco/Escuela	**Fecha**	**Termıno Orıgınal**	**Termıno Moderno**
Frechet	1906	Compacto	Relatıvamente secuencıalmente compacto
		Extremo	Secuencıalmente compacto
Escuela Rusa (Alexandroff etc)	1920	Bıcompacto	Compacto
		Compacto	Compacto contable
Bourbakı	1930	Cuası compacto	Compacto
		Compacto	Compacto y Hausdorff

CAPÍTULO II
LA COMPACIDAD EN $\mathbb{R}^n$

II LA COMPACIDAD EN $\mathbb{R}$

El concepto de compacidad es una generalizacion topologica de conjunto finito En efecto todo conjunto finito es compacto a pesar de que existen conjuntos compactos infinitos las propiedades topologicas de estos ultimos los hacen muy semejantes a los finitos

La importancia de los conjuntos compactos en topologia metrica o general es fundamental La riqueza de sus propiedades y facilidad de su manejo los hace desempenar un papel primordial

2 1 CONJUNTOS ACOTADOS

La nocion de conjunto de numeros reales acotados superior e inferiormente esta ligada a la relacion de orden en $\mathbb{R}$ Un espacio metrico no esta (necesariamente) provisto de una relacion de orden por lo tanto no podemos extender la idea directamente Sin embargo si pensamos en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ intuitivamente podemos imaginar lo que queremos indicar al decir que el conjunto esta acotado Podemos pensar que el conjunto no se extiende indefinidamente o que se mantiene dentro de ciertos limites En estos casos podemos suponer que las distancias entre los puntos del conjunto no exceden una cierta cantidad

Definicion 2 1 1 Sea A un conjunto no vacio en un espacio metrico $(E\ d)$ Decimos que A es acotado si existe algun real $k>0$ tal que

$$d(x\ y) \leq k \quad \text{para todo } x\ y \in A$$

Observacion Es consecuencia inmediata de esta definicion que todo subconjunto no vacio de un conjunto acotado es tambien acotado

Teorema 2 1 1 Un conjunto en $\mathbb{R}$ es acotado si y solo si es acotado superior e inferiormente

Demostracion

$\Rightarrow]$ Sea A un conjunto no vacio de numeros reales y acotado segun la definicion 2 1 1

Entonces existe un $k > 0$ tal que

$$d(x\ y) = |x - y| \leq k \quad \text{para todo } x\ y \in A$$

Tomemos un $x_1 \in A$ fijo tenemos entonces

$$|x - x_1| \leq k \quad \text{para todo } x \in A$$

pero esta desigualdad es equivalente a

$$x_1 - k \leq x \leq x_1 + k \quad \text{para todo } x \in A$$

Es decir A esta acotado superior e inferiormente

$\Leftarrow]$ Supongamos que A es un conjunto no vacio de numeros reales y acotado superior e inferiormente Sea a una cota inferior y b una cota superior entonces tenemos que

$$A \subset [a\ \ b]$$

Por lo tanto

$$x\ \ y \in [a\ \ b] \text{ para todo } x\ \ y \in A$$

Por consiguiente

$$|x - y| \leq b - a$$

Asi A esta acotado segun definicion 2 1 1

Observacion Sea A un conjunto no vacio en un espacio metrico $(E\ \ d)$ Decir que A es acotado es equivalente a que el conjunto de numeros reales $\{d(x\ \ y)\}$ esta acotado superiormente para todo par $x\ \ y \in A$

Definicion 2 1 2 Sea A un conjunto acotado en un espacio metrico $(E\ \ d)$ El extremo superior o diametro del conjunto A lo denotamos por $\delta(A) = \sup\limits_{x\ y \in A} \{d(x\ \ y)\}$

Observacion Si A es acotado pueden no existir puntos $x\ \ y \in A$ tales que $d(x\ \ y) = \delta(A)$ Por ejemplo el diametro del intervalo abierto $(a\ \ b)$ (para $a < b$) en la recta real es $b - a$ y sin embargo la distancia entre cualquier par de puntos es siempre estrictamente menor que $b - a$ No obstante existen ciertos conjuntos (los conjuntos compactos) para los cuales se pueden hallar tales puntos

Teorema 2.1.2: Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E,d). A es acotado si y sólo si está contenido en una esfera abierta.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Supongamos que A es acotado y sea $\delta(A)$ su diámetro. Tomemos un punto cualquiera $a \in E$ y construyamos una esfera abierta de centro a y que contenga A.

En efecto, como A no es vacío, elegimos arbitrariamente un $x_1 \in A$ y con radio $r = d(a,x_1) + \delta(A) + 1$.

Consideremos la esfera abierta $N(a;r)$.

Tenemos que para todo $x \in A$

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq d(a,x_1) + d(x,x_1) \\ &\leq d(a,x_1) + \delta(A) \\ &< d(a,x_1) + \delta(A)+1 \end{aligned}$$

Es decir, $x \in N(a;\ r)$.

$\Leftarrow]$ Si A está contenido en una esfera abierta entonces A es acotado por ser subconjunto de un conjunto acotado.

2.2 CONJUNTOS PRECOMPACTOS

Un nuevo conjunto, de gran importancia y utilidad, es el de conjunto precompacto. Es una propiedad algo más fuerte que la de ser acotado. En importante señalar que en la literatura matemática se emplea con frecuencia el nombre de conjunto "totalmente acotado" en lugar de precompacto.

Definición 2.2.1: Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E,d). Diremos que A es precompacto si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k;\varepsilon).$$

Observación: Si A es finito, entonces A es precompacto. El recíproco no es cierto; por ejemplo, un intervalo acotado de infinitos puntos en la recta es precompacto.

Teorema 2.2.1: En un espacio métrico cualquiera, todo conjunto precompacto es acotado.

Demostración: Sea A un conjunto precompacto en un espacio (E,d). Tomando $\varepsilon = 1$, existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k;1) \qquad (*)$$

Sea h el máximo de todas las distancias $d(x_i, x_j)$, para $i = 1, \cdots, n;\quad j = 1, \cdots, n$.

Tomemos cualesquiera $x, y \in A$.

De $(*)$ tenemos que

$$x \in N(x_i;1), \qquad y \in N(x_j;1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_i) + d(y,x_i) \\ &\leq d(x,x_i) + d(y,x_j) + d(x_i,x_j), \end{aligned}$$

o sea que

$$d(x,y) < 2+h.$$

Por lo tanto, A es acotado.

Observación: En general, el recíproco del teorema anterior no es cierto. Sin embargo, en $\mathbb{R}^n$ todo conjunto acotado es precompacto.

2.3 CONJUNTOS SEPARABLES

El concepto de separabilidad es de carácter auxiliar en el estudio de la compacidad.

Definición 2.3.1: Se dice que un conjunto no vacío A de un espacio métrico (E,d) es *separable* si existe un conjunto contable S con $S \subset A$, tal que $A \subset \overline{S}$. Se dice que el espacio (E,d) es separable, si el conjunto E es separable. En este caso la definición se reduce a que existe un conjunto denso y contable.

Observación: La recta real es el ejemplo clásico de espacio separable, ya que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso y contable. Es evidente que todo conjunto contable (lo cual incluye los finitos) es separable.

Definición 2.3.2: Sea A un conjunto del espacio métrico (E,d). Una familia F de conjuntos de (E,d) tal que $A \subset \bigcup_{B \in F} B$ recibe el nombre de *cubrimiento* de A; se dice también que F *cubre* a A. Un subcubrimiento de F es una subfamilia de F que también cubre a A. Diremos que F es un *cubrimiento abierto* de A, si F cubre a A y todos los conjuntos de F son abiertos.

Teorema 2.3.1: Sea A un conjunto separable de (E,d), entonces todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento contable.

Demostración: Sea F un cubrimiento abierto de A.

Como A es separable, entonces existe un conjunto contable S tal que

$$S \subset A \text{ y } A \subset \overline{S}$$

Sea $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$.

Sea G la familia contable de todas las esferas abiertas de la forma $N\left(x_n; \frac{1}{m}\right)$, para $x_n \in S$ y $m \geq 1, \quad m \in \mathbb{N}$.

Sea $G = \{N_1, N_2, \cdots\}$.

Tomemos un $N_k \in G$. Si existe alguno o algunos $B \in F$ con $N_k \subset B$, seleccionamos uno de ellos y lo llamamos B_k. Construimos de esta manera una subfamilia contable F_1 de F tal que $F_1 = \{B_1, B_2, \cdots\}$.

Demostremos que F_1 cubre a A.

Tomemos un $x \in A$. Como F es un cubrimiento de A, existe algún $B \in F$ con $x \in B$; pero como B es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$N(x;r) \subset B.$$

Elijamos un número natural $m \geq 1$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \frac{r}{2}$.

Ahora bien, $x \in \overline{S}$, ya que $A \subset \overline{S}$, y como $N(x;\frac{1}{m})$ es un entorno de x, esto implica que existe algún $x_n \in N(x;\frac{1}{m})$.

Entonces, $d(x_n, x) < \frac{1}{m}$; es decir, $x \in N(x_n;\frac{1}{m})$

Por otro lado, si $y \in N(x_n;\frac{1}{m})$; entonces

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(y,x_n) < \frac{2}{m} < r,$$

o sea

$$y \in N(x;r),$$

es decir

$$N(x_n;\tfrac{1}{m}) \subset N(x;r),$$

entonces

$$N(x_n;\tfrac{1}{m}) \subset B;$$

pero sabiendo que

$$N\left(x \quad \tfrac{1}{m}\right) \subset G$$

la construccion de F_1 nos dice que

$$N\left(x \quad \tfrac{1}{m}\right) \subset B_k \text{ para } B_k \in F_1$$

De allı que $x \in B_k$ es decir $A \subset \bigcup_{k\ 1}^{\infty} B_k$ y F_1 constıtuye un subcubrımıento contable de F

Teorema 2 3 2 Sea $(E\ d)$ un espacıo metrıco Sea A un conȷunto precompacto entonces A es separable

Demostracıon Sea A un conȷunto precompacto de un espacıo metrıco $(E\ d)$

Para todo numero natural $m \geq 1$ existe un conȷunto fınıto de puntos

$$x_{m\,1}\ x_{m\,2} \qquad x_m \quad \in A$$

tales que

$$A \subset \bigcup_{=1} N\left(m_m \quad \tfrac{1}{m}\right)$$

Sea S el conȷunto contable de todos los x_m para todo numero natural $m \geq 1$

Tenemos que $S \subset A$ y sı demostramos que $A \subset \overline{S}$ entonces A es separable

Tomemos un $x \in A$ cualquıera y sea $\varepsilon > 0$ un numero real Elıȷamos un numero natural m tal que

$$0 < \tfrac{1}{m} < r$$

En virtud de la definición de S, existe un $x_{m,i} \in S$ con $x \in N\left(x_{m,i}; \frac{1}{m}\right)$; es decir, $d\left(x, x_{m,i}\right) < \frac{1}{m} < \varepsilon$, pero como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto implica que

$$d(x, S) = 0,$$

de donde $x \in \overline{S}$. O sea que $A \subset \overline{S}$.

2.4 CONJUNTOS COMPACTOS

Centraremos nuestra atención en el estudio de los números reales y al espacio $\mathbb{R}^k$.

Naturalmente que todo lo que acontece en espacios métricos se aplica a $\mathbb{R}^k$. Sin embargo, dada la importancia de los números reales es de esperar que se verifiquen algunas propiedades topológicas que no se cumplen en espacios métricos en general.

Probaremos propiedades características. Por ejemplo, la propiedad de completitud y el hecho que todo conjunto acotado es precompacto. Al combinar ambas, nos encontramos con los célebres teoremas de Bolzano-Weirstrass y Heine-Borel.

Es oportuno señalar, aunque nuestro estudio no tendrá ese alcance, que todos esos atributos de $\mathbb{R}^k$ se generalizan a espacios normados de dimensión finita y los caracterizan.

Definicion 2 4 1 Sea A un conjunto no vacio en $\mathbb{R}$ A es *compacto* si todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento finito

Definicion 2 4 2 Sea A un conjunto no vacio en $\mathbb{R}$ A posee la *propiedad de Bolzano Weierstrass* si todo subconjunto infinito T de A admite un punto de acumulacion en A es decir $T \cap A \neq \varnothing$ Para abreviar a tales conjuntos los llamaremos BW

Lema 2 4 1 Sean x y puntos del espacio $(\mathbb{R} \ d)$ tales que $x \neq y$ entonces existe un entorno S de x y un entorno T de y tal que $S \cap T = \varnothing$

Demostracion Notese que como $x \neq y$ $d(x \ y) > 0$

Sea $r = \frac{1}{2} d(x \ y)$

Consideremos las esferas abiertas

$$S = N(x \ r) \quad T = N(y \ r)$$

que son entornos de x y y respectivamente

Para demostrar que $S \cap T = \varnothing$ basta con tomar $z \in S$ generico y probar que $z \notin T$

En efecto

$$2r = d(x \ y) \leq d(z \ x) + d(z \ y) < r + d(z \ y)$$

de donde $d(z \ y) > r$ es decir $z \notin T$

Teorema 2.4.1: Sea A un conjunto compacto y x un punto, ambos en $\mathbb{R}^n$. Si $x \notin A$, existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \varnothing$

Demostración: Si $y \in A$, necesariamente $x \neq y$, ya que $x \notin A$.

De acuerdo con el Lema 2.4.1, existe un entorno $S(y)$ de x y un entorno $T(y)$ de y con $S(y) \cap T(y) = \varnothing$.

La familia de entornos $T(y)$ para todo $y \in A$ es un cubrimiento abierto de A.

Como éste es compacto, existe un cubrimiento finito

$$\{T(y_1), T(y_2), \cdots, T(y_n)\}.$$

Estos entornos se corresponden con entornos de x $\{S(y_1), S(y_2), \cdots, S(y_n)\}$, tales que $S(y_k) \cap T(y_k) = \varnothing$ para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Sean

$$S = \bigcap_{k=1}^{n} S(y_k), \quad T = \bigcap_{k=1}^{n} T(y_k)$$

Luego, S es un entorno de x y T es un conjunto abierto.

Tenemos que $A \subset T$.

Para probar que $S \cap T = \varnothing$, basta con tomar un $z \in T$ genérico y comprobar que $z \notin S$.

En efecto $z \in T(y_k)$ para algun $k = 1$ n pero como $S(y_k) \cap T(y_k) = \varnothing$ $z \notin S(y_k)$ lo cual implica que $z \notin S$

Corolario 2 4 1 Todo conjunto compacto en $\mathbb{R}$ es cerrado

Demostracion Sea A un conjunto compacto en $(\mathbb{R} \;\; d)$ Si $A = \mathbb{R}$ sabemos que A es cerrado Supongamos que A es subconjunto propio de $\mathbb{R}$ y tomemos un $x \notin A$ es decir $x \in \mathbb{R}^n - A$

Aplicando el Teorema 2 4 1 existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \varnothing$ Pero entonces $S \cap A = \varnothing$ lo cual implica que $x \notin \overline{A}$

Hemos demostrado que $(\mathbb{R} \; - A) \cap \overline{A} = \varnothing$ de donde $\overline{A} \subset A$ es decir $A = \overline{A}$

Por lo tanto A es cerrado

Teorema 2 4 2 Todo conjunto compacto en $\mathbb{R}$ es precompacto

Demostracion Sea A compacto y $\varepsilon > 0$ un numero real

La familia de esferas abiertas $N(x \;\; \varepsilon)$ para todo $x \in A$ es evidentemente un cubrimiento abierto de A

Entonces existe un subcubrimiento finito

$$\{N(x_1 \;\; \varepsilon) \;\; N(x_2 \;\; \varepsilon) \qquad N(x_1 \;\; \varepsilon)\}$$

Es decir

$$A \subset \bigcup_{=1} N(x \quad \varepsilon) \text{ donde } x_1 \; x_2 \qquad x \in A$$

Corolario 2 4 2 Todo conjunto compacto en $\mathbb{R}$ es acotado

Lema 2 2 2 Todo conjunto BW en $\mathbb{R}$ es precompacto

Demostracion Sea A un conjunto BW en $(\mathbb{R} \quad d)$

Supongamos que A no es precompacto Entonces debe existir algun numero real $\varepsilon_1 > 0$ tal que no existe sucesion finita de puntos de A de forma que las esferas abiertas de centro en esos puntos y radio ε_1 cubra a A

Esto nos permite construir una sucesion infinita de puntos de A que designaremos por $T = \{x_1 \; x_2 \qquad \}$ de la siguiente manera

Tomamos arbitrariamente $x_1 \in A$ En virtud de nuestra hipotesis A no puede estar contenido en $N(x_1 \; \varepsilon_1)$ elegimos entonces $x_2 \in A - N(x_1 \; \varepsilon_1)$

Analogamente construimos $x_1 \; x_2 \qquad x_{-1}$ notamos que A no puede estar contenido en $\bigcup_{=1}^{-1} N(x \quad \varepsilon_1)$ y tomamos $x \quad \in A - \bigcup_{1}^{-1} N(x \quad \varepsilon_1)$

Hemos formado asi por induccion al conjunto infinito T con $T \subset A$

En virtud de su construccion posee la propiedad de que para $x \quad x_j \in T \qquad i \neq j$

$d(x \quad x_j) \geq \varepsilon_1$ (*)

Dado que A es BW existe un punto $x \in A$ que es de acumulacion de T

Esto implica que el entorno $N\left(x \; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ de x contiene infinitos puntos de T y podemos tomar $x \;\; x_j \in T \cap N\left(x \; \frac{\ }{2}\right)$ con $i \neq j$ entonces

$$d\left(x \;\; x_j\right) \leq d\left(x \;\; x\right) + d\left(x_j \;\; x\right) < \varepsilon_1$$

lo cual contradice (*)

Por lo tanto A es precompacto

Teorema 2 4 3 En $\mathbb{R}$ un conjunto es compacto si y solo si es BW

Demostracion Sea A un conjunto compacto Si A no es BW existe un conjunto infinito T con $T \subset A$ tal que $T \cap A = \varnothing$ Esto implica que para cada $x \in A$ $x \notin T$ o sea que existe un entorno $S(x)$ de x tal que $T \cap S(x)$ es vacio o contiene solo a x si $x \in T$

Es evidente que la familia de tales entornos $S(x)$ para todo $x \in A$ es un cubrimiento abierto de A y como este es compacto admite un subcubrimiento finito

$$A \subset \bigcup_{=1} S(x)$$

pero entonces $T \subset \bigcup_{=1} S(x)$ Teniendo en cuenta que por construccion cada $S(x)$ contiene a lo mas un punto de T (si $x \in T$) la ultima inclusion indica que T no contiene mas de n puntos contradiciendo la infinitud de T

Reciprocamente supongamos que A es BW y sea F un cubrimiento abierto de A

Luego A es precompacto y por lo tanto separable

Por consiguiente existe una subfamilia contable F_1 de F que tambien cubre a A

Designemos $F_1 = \{B_1 \; B_2 \quad \}$

Supongamos ahora que para todo numero natural $n \geq 1$ $A \not\subset \bigcup_{=1} B_i$ y veamos que nos conduce a una contradiccion En efecto tal suposicion nos permite construir un conjunto infinito $T = \{x_1 \; x_2 \quad \}$ con $T \subset A$ de la siguiente manera

Tomamos $x_1 \in A$ y para todo $n > 1$

$$x \quad \in A - \bigcup_{1}^{1} B$$

Ahora bien como A es BW existe un punto $x \in A$ de acumulacion de T y como F_1 cubre A $x \in B_k$ para algun k natural

Pero entonces B_k es un entorno de x ya que es abierto luego B_k contiene infinitos puntos de T

Forzosamente debe existir algun $x_n \in T \cap B_k$ con $n > k$ pero esto contradice la construccion de T la cual hace que $x_n \notin B_k$ si $n > k$

De manera que para algun numero natural $n \geq 1$

$$A \subset \bigcup_{=1} B$$

y A es compacto

Teorema 2 4 4 Si B es un subconjunto no vacio y cerrado de un conjunto compacto A entonces B es compacto

Demostracion Si B es finito es compacto De lo contrario sea T un subconjunto infinito de B Como $B \subset A$ T es un subconjunto infinito de A y como este ultimo es BW existe un punto $x \in T \cap A$ Pero todo punto de acumulacion de T lo es de B ya que $T \subset B$ y como B es cerrado pertenece a B es decir $x \in T \cap B$

Por lo tanto B es BW o sea compacto

2 5 CONJUNTOS RELATIVAMENTE COMPACTOS

Dado que la compacidad es una propiedad muy fuerte es conveniente definir un concepto un poco mas debil

Definicion 2 5 1 Diremos que un conjunto no vacio en $\mathbb{R}$ es *relativamente compacto* si su clausura es compacta

Observacion Como todo conjunto compacto es cerrado se deduce inmediatamente de la definicion anterior que un conjunto compacto es relativamente compacto Tambien es trivial que un conjunto relativamente compacto y cerrado es compacto

Teorema 2 5 1 Si B es un subconjunto no vacio de un conjunto relativamente compacto A entonces B es relativamente compacto

Demostracion Como $B \subset A$ obtenemos que $\overline{B} \subset \overline{A}$ pero $\overline{A}$ es compacto y $\overline{B}$ es un subconjunto no vacio y cerrado de $\overline{A}$

Por lo tanto $\overline{B}$ es compacto y B es relativamente compacto

Observaciones

- ✓ Es consecuencia inmediata del teorema anterior que todo subconjunto no vacio de un compacto es relativamente compacto
- ✓ Todo conjunto relativamente compacto es acotado ya que es un subconjunto de su clausura la cual es acotada por ser compacta

Teorema 2 5 2 Todo conjunto relativamente compacto en $\mathbb{R}$ es precompacto

Demostracion Sea A un conjunto relativamente compacto

Su clausura $\overline{A}$ es precompacta por ser compacta pero A es un subconjunto no vacio de $\overline{A}$ entonces A es precompacto

Lema 2 5 1 El rango de una sucesion de Cauchy es un conjunto precompacto

Demostracion Sea $\{x_n\}$ una sucesion de Cauchy en $(\mathbb{R} \quad d)$

Dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n\ n \geq \nu$ tenemos que $d(x\ \ x\ ) < \varepsilon$ de donde para todo $n \geq \nu$ tenemos que $d(x\ \ x\ ) < \varepsilon$ es decir $x\ \in N(x\ \ \varepsilon)$ para todo $n \geq \nu$

Por consiguiente tenemos que $\bigcup_{=0} N(x\ \ \varepsilon)$ contiene todos los terminos de la sucesion y por tanto al rango Ademas los centros $x_0\ x_1\ \ \ \ x$ pertenecen por supuesto al rango

Corolario 2 5 1 El rango de una sucesion de Cauchy es un conjunto acotado

Demostracion El rango de una sucesion de Cauchy es un conjunto precompacto y por lo tanto acotado

Observacion El reciproco del Lema 2 5 1 no es cierto Por ejemplo el rango de la sucesion $\{(-1)\ \}$ en $\mathbb{R}$ es precompacto por ser finito sin embargo la sucesion no es de Cauchy

Lema 2 5 2 Si el rango de una sucesion es un conjunto precompacto esta admite una sucesion parcial de Cauchy

Demostracion Si el rango de la sucesion es un conjunto finito sabemos que esta admite una sucesion parcial constante y por lo tanto de Cauchy

Consideremos una sucesion $S_1 = \{x_1^1 \ x_2^1 \quad x^1 \quad \}$ cuyo rango sea un conjunto precompacto e infinito

En el transcurso de la demostracion utilizaremos la notacion N para designar una esfera abierta de radio $r > 0$ y centro algun punto del espacio

Indiquemos por R_1 al rango de S_1

Por hipotesis R_1 esta contenido en la union de un numero finito de esferas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ Al menos una de ellas contendra infinitos puntos de R_1 y estos constituyen respetando el orden relativo con que figuran en S_1 una sucesion parcial

$$S_2 = \{x_1^2 \ x_2^2 \quad x^2 \quad \}$$

de S_1 cuyo rango R_2 es infinito y $R_2 \subset R_1$ $R_2 \subset N_{\frac{1}{2}}$

Razonando analogamente R_1 esta contenido en la union de un numero finito de esferas abiertas de radio $\frac{1}{3}$ Al menos una de ellas contendra infinitos puntos de R_2 y estos constituyen respetando el orden relativo con que figuran como terminos en S_2 una sucesion parcial

$$S_3 = \{x_1^3 \ x_2^3 \quad x^3 \quad \}$$

de S_1 y S_2 cuyo rango R_3 es infinito y $R_3 \subset R_2 \subset R_1$ $R_3 \subset N_{\frac{1}{3}}$

Procediendo por induccion supongamos construidas hasta la sucesion

$$S_{k-1} = \{x_1^{k-1} \ x_2^{k\ 1} \quad x^{k-1} \quad \}$$

tales que cada una sea parcial de todas las anteriores, sus rangos son infinitos y cumplen las relaciones $R_{k-3} \subset R_{k-2} \subset \cdots R_1,\ R_i \subset N_{\frac{1}{i}}\ \ (i = 1, \cdots, k-1)$.

Ahora bien, R_1 está contenido en la unión de un número finito de esferas abiertas de radio $\frac{1}{k}$. Al menos una de ellas contendrá infinitos puntos de R_{k-1} y éstos constituyen, respetando el orden relativo con que figuran como términos en S_{k-1}, una sucesión parcial

$$S_k = \left\{x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k, \cdots\right\}$$

de S_{k-1} y, por lo tanto, $S_{k-2}, \cdots, S_1$ cuyo rango R_k es infinito y $R_k \subset R_{k-1} \subset \cdots R_1,\ R_k \subset N_{\frac{1}{k}}$.

De esta manera hemos construido una familia $\{S_1, S_2, \cdots\}$ de sucesiones tal que S_n es una sucesión parcial de todas las anteriores y su rango R_n está contenido en una esfera $N_{\frac{1}{n}}$.

La sucesión

$$\left\{x_1^k, x_2^2, \cdots, x_n^n, \cdots\right\}$$

es parcial de S_1.

Demostremos que es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{2}{\nu} < \varepsilon$.

Ahora bien para todo $n\ n \geq v$ los puntos x x pertenecen a los rangos R R respectivamente y $R \subset R$ $R \subset R$ $R \subset N_1$ Se deduce que x $x \in N_1$ pero el diametro $\delta(N_1) \leq \underline{2}$ lo cual implica

$$d(x \quad x) \leq \underline{2} < \varepsilon$$

Teorema 2 5 3 Todo conjunto precompacto en $\mathbb{R}$ es relativamente compacto

Demostracion Sea A un conjunto precompacto

Sea $\{x\}$ una sucesion en $\overline{A}$ El rango de la sucesion es precompacto por ser un subconjunto del precompacto $\overline{A}$

Luego $\{x\}$ admite una sucesion parcial de Cauchy $\{y\}$ pero como $\mathbb{R}$ es completo $\{y_n\}$ converge a un punto y Por otra parte la sucesion $\{y\}$ esta tambien en $\overline{A}$ luego y pertenece a la clausura de $\overline{A}$ o sea a $\overline{A}$ y este es SC por lo tanto compacto

Asi A es relativamente compacto

Definicion 2 5 2 Tomemos un numero real $a > 0$ Llamamos *bloque centrado y cerrado* en $\mathbb{R}^k$ al conjunto

$$J = I_1 \times I_2 \times \quad \times I_k$$

donde

$$I_i = [-a, a] \quad (i = 1, \cdots, k)$$

Expresado de forma equivalente:

$$J_a = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) : -a \leq x_i < a, \ i = 1, \cdots, k\}$$

Si se trata de la recta real $(k=1)$, J_a no es otra cosa que el intervalo cerrado $[-a, a]$. En $\mathbb{R}^2$ J_a es, geométricamente, un cuadrado de lado $2a$, cuyo centro coincide con el punto $(0,0)$. En $\mathbb{R}^3$, J_a es un "bloque" rectangular de lados o aristas todos iguales a $2a$ y cuyo centro es el punto $(0,0,0)$.

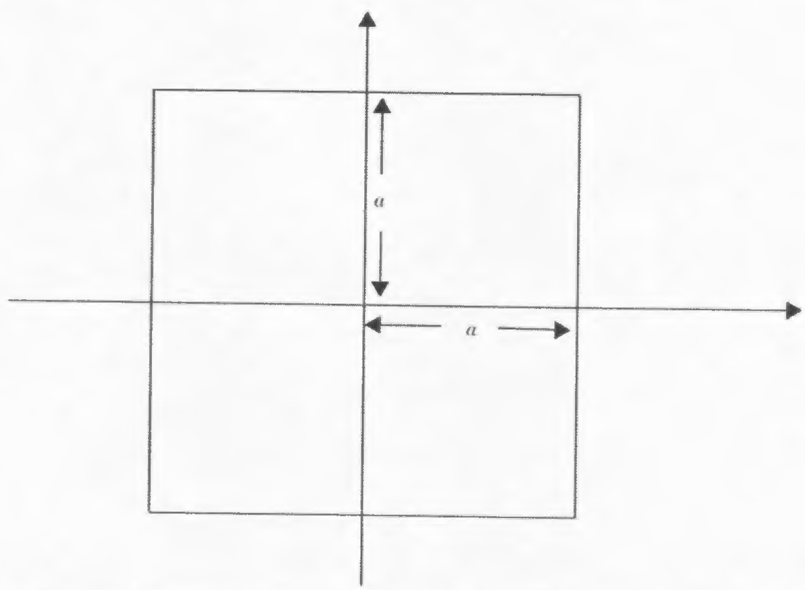

Figura 2.5.1: Ilustración geométrica de un bloque centrado y cerrado en $\mathbb{R}^2$

Lema 2.5.3: Todo bloque centrado y cerrado en $\mathbb{R}^k$ es precompacto.

Demostracion Consideremos el bloque J_a y sea $\varepsilon > 0$ Tomemos un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2ak}{m} < \varepsilon \qquad (*)$$

Tenemos que $J = I_1 \times I_2 \times \quad \times I_k$ donde $I = [-a \ a] \quad \imath = 1 \ 2 \qquad k$

Ahora bien cada intervalo I dividamoslo en m partes iguales es decir fijemos los puntos

$$-a \ -a + \frac{2a}{m} \ -a + 2 \times \frac{2a}{m} \qquad -a + m \times \frac{2a}{m} = a$$

en cada I obteniendo asi una particion de I en los m intervalos cerrados

$$I^{\jmath} = \left[-a + \jmath \frac{2a}{m} \ -a + (\jmath + 1) \frac{2a}{m} \right] \qquad \jmath = 0 \ 1 \qquad m - 1$$

Formamos ahora los m^k productos cartesianos

$$I_1^{\jmath 1} \times I_2^{\jmath 2} \times \quad \times I_k^{\jmath k}$$

donde cada $\jmath$ toma los valores $0 \ 1 \qquad m-1$ La union de todos estos conjuntos es J_a

En cada uno elegimos arbitrariamente un punto

$$x \in I_1^{\jmath 1} \times \quad \times I_k^{\jmath k}$$

y consideremos la esfera abierta $N(x \ \varepsilon)$

$x = (x_1 \qquad x_k)$ y tomemos un $x = (x_1 \qquad x_k)$ de $I_1^{\jmath 1} \times \quad \times I_k^{\jmath k}$ cualquiera

Para cada $\imath = 1 \qquad k$

$$x_i, x_i' \in I_i^{ji} = \left[-a + j_i \frac{2a}{m}, -a + (j_i + 1)\frac{2a}{m}\right],$$

lo cual implica que

$$|x_i - x_i'| \leq -\cdot\frac{2a}{m}$$

Ahora bien, por $(*)$,

$$\|x' - x\| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i' - x_i| \leq \frac{2ak}{m} < \varepsilon$$

O sea que $x' \in N(x; \varepsilon)$, es decir, $I_1^{j1} \times I_2^{j2} \times \cdots \times I_k^{jk} \subset N(x; \varepsilon)$. De manera que J_a está contenido en la unión de las m^k esferas $N(x; \varepsilon)$ y es precompacto.

Observación: Los bloques centrados y cerrados poseen propiedades mucho más poderosas; sin embargo, para nuestro estudio sólo necesitamos la anterior.

Teorema 2.5.3: Todo conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$ es precompacto.

Demostración: Sea A un conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$. Tomemos el punto $\theta = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

Luego, existe un número real $a > 0$ tal que

$$A \subset N(\theta; a)$$

Consideremos el bloque centrado y cerrado J_a y veamos que $N(\theta; a) \subset J_a$.

En efecto, tomemos un punto $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in N(\theta; a)$ cualquiera.

Entonces,

$$|x_i| \leq \|x\| = d(x,\theta) < a \qquad (i=1,2,\cdots,k),$$

lo que equivale a:

$$-a < x_i < a \qquad (i=1,2,\cdots,k).$$

O sea que

$$x \in J_a \text{ y } N(\theta;a) \subset J_a$$

Lo cual implica que

$$A \subset J_a.$$

Por lo tanto, J_a es precompacto y, por consiguiente A es también precompacto.

Corolario 2.5.2: Todo conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$ es relativamente compacto.

Demostración: Todo conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$ es precompacto; pero $\mathbb{R}^k$ es un espacio completo, lo cual implica que todo conjunto precompacto es relativamente compacto.

Corolario 2.5.3 (***Heine-Borel***): Todo conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^k$ es compacto.

Corolario 2.5.4 (**Bolzano-Weierstrass**): Todo conjunto infinito y acotado en $\mathbb{R}^k$ admite algún punto de acumulación.

Demostración: Sea A un conjunto infinito y acotado en $\mathbb{R}^k$. Luego, A es relativamente compacto. Su clausura $\overline{A}$ es compacta y, por tanto, BW. Pero A es un subconjunto infinito de $\overline{A}$, luego admite algún punto de acumulación (en $\overline{A}$).

2.6 COMPLETITUD

Teorema 2.6.1: El conjunto de los números reales es un espacio métrico completo.

Demostración: Sea $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ una sucesión de Cauchy en la recta real y designemos por $\mathbb{R}_0$ su rango. Luego, $\mathbb{R}_0$ es un conjunto acotado. Sabemos que esto equivale, en la recta real, a decir que $\mathbb{R}_0$ está acotado superior e inferiormente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ cotas inferior y superior de $\mathbb{R}_0$, respectivamente. Entonces,

$$a \leq x_n \leq b \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, designemos por $\mathbb{R}_n$ al rango de la sucesión $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ y construyamos la sucesión $\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ tal que

$$y_n = sup\, \mathbb{R}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_{n+1} \subset \mathbb{R}_n$, lo cual implica que $y_{n+1} \leq y_n$, o sea que la sucesión $\{y_n\}$ es decreciente.

Por otra parte, se deduce de inmediato que $a \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, el rango de $\{y_n\}$ está acotado inferiormente. Sabemos entonces que $y_n \to z$, donde z es el extremo inferior del rango de $\{y_n\}$.

Probemos que $x_n \to z$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $v_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, n' \geq v_1$

$$|x_n - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Además, como $z < z + \frac{\varepsilon}{2}$, resulta que $z + \frac{\varepsilon}{2}$ no puede ser cota inferior del rango de $\{y_n\}$. Debe existir algún y_{v_2} con

$$z \leq y_{v_2} < z + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Sea ahora $\mu = máx\{v_1, v_2\}$. Como $\mu \geq v_2$ y $\{y_n\}$es decreciente,

$$z \leq y_\mu \leq y_{v_2} < z + \tfrac{\varepsilon}{2} ,$$

de donde

$$z - \tfrac{\varepsilon}{2} < y_\mu < z + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Pero teniendo en cuenta que $y_\mu = sup\, \mathbb{R}_\mu$, $z - \frac{\varepsilon}{2}$ no puede ser cota superior de $\mathbb{R}_\mu$. Debe existir algún $x_v \in \mathbb{R}_\mu$, para lo cual $v \geq \mu$ con

$$z - \tfrac{\varepsilon}{2} < x_v \leq y_\mu ,$$

es decir,

$$z - \tfrac{\varepsilon}{2} < x_v < z + \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Ahora bien, como $v \geq v_1$, resulta que para todo $n \geq v$, ambos $n, v \geq v_1$ y se aplica $(*)$:

$$|x_n - x_v| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

lo cual equivale a:

$$x_v - \tfrac{\varepsilon}{2} < x_n < x_v + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Pero haciendo uso de $(**)$, obtenemos:

$$z - \varepsilon < x_v - \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad x_v + \tfrac{\varepsilon}{2} < z + \varepsilon;$$

de donde

$$\forall\, n \geq v: \; z - \varepsilon < x_n < z + \varepsilon,$$

desigualdades equivalentes a:

$$|x_n - z| < \varepsilon.$$

Observación: Note que el subespacio de la recta real constituido por el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es completo, ya que $\mathbb{Q}$ no es cerrado por no coincidir con su clausura que es $\mathbb{R}$.

Definición 2.6.1: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^k$; para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^k$ y, por tanto, $x_n = \{x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{kn}\}$. Note que $\{x_n\}$ determina k sucesiones reales $\{x_{in}\}\,(i = 1, \cdots, k)$ que denominaremos *sucesiones coordenadas* de $\{x_n\}$.

Lema 2.6.1: Una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^k$ es convergente si y sólo si son convergentes todas sus sucesiones coordenadas $\{x_{in}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

En tal caso, si $x_{i\,n} \to x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, entonces $x_n \to (x_1, \cdots, x_k)$, y recíprocamente.

Demostración: Supongamos que $x_n \to (x_1, \cdots, x_k)$ y sea $\varepsilon > 0$.

Existe un $v \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq v$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$, donde

$$x = (x_1, \cdots, x_k).$$

Pero

$$x_n - x = (x_{1n} - x_1,\ x_{2n} - x_2, \cdots, x_{kn} - x_k),$$

Luego,

$$|x_{in} - x_i| \leq \|x_n - x\| \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

Tenemos entonces que para todo $n \geq v$ y para cada $i = 1, 2, \cdots, k$:

$$|x_{in} - x_i| < \varepsilon,$$

o sea que $x_{i\,n} \to x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

Recíprocamente, supongamos que $x_{i\,n} \to x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Luego, si $\varepsilon > 0$, existen $v_i \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq v_i$,

$$|x_{in} - x_i| < \frac{\varepsilon}{k},$$

donde $i = 1, 2, \cdots, k$.

Sea $v = máx\{v_1, \cdots, v_k\}$, entonces para todo $n \geq v$ se verifican:

$$|x_{in} - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

Luego, para todo $n \geq v$ tenemos que

$$\|x_n - x\| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_{in} - x_i| \leq \varepsilon ;$$

Donde, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$. O sea que $x_n \to x$.

Teorema 2.6.2: $\mathbb{R}^k$ es un espacio completo.

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$ y $\{x_{in}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ sus sucesiones coordenadas.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $v \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, n' \geq v$ tenemos que

$$\|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon .$$

Pero

$$x_n - x_{n'} = (x_{1n} - x_{1n'}, \ x_{2n} - x_{2n'}, \cdots, x_{kn} - x_{kn'}) ,$$

Luego, para todo $n, n' \geq v$ tenemos que

$$|x_{in} - x_{in'}| \leq \|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

O sea que las sucesiones coordenadas de $\{x_n\}$ son de Cauchy, lo cual implica, por ser la recta real un espacio completo, que son todas convergentes. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es convergente.

Teorema 2 6 3 Un espacio metrico en $\mathbb{R}$ en el cual todo conjunto precompacto es relativamente compacto es completo

Demostracion Sea $\{x\}$ una sucesion de Cauchy Su rango A es precompacto

Luego A es relativamente compacto es decir $\overline{A}$ es compacto y por lo tanto SC

Pero $\{x\}$ es una sucesion en $\overline{A}$ entonces admite una sucesion parcial convergente lo cual implica que $\{x\}$ converge

Por lo tanto el espacio es completo

Teorema 2 6 4 Si $F \subset \mathbb{R}^k$ es compacto entonces $(F\ d)$ es completo

Demostracion Sea $\{x_n\}$ una sucesion de Cauchy en $(F\ d)$ F es SC por ser compacto luego la sucesion $\{x\}$ que esta en F admite una sucesion parcial convergente cuyo limite $x \in F$

Luego $x \to x$

Asi $(F\ d)$ es completo

Teorema 2 6 5 Si $(F\ d)$ es completo entonces F es cerrado

Demostracion Tomemos $x \in F$

Luego existe una sucesion $\{x\}$ en F con $x \to x$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesion convergente en $(F\ d)$ y por consiguiente de Cauchy

Como esta en F $\{x\}$ es una sucesion de Cauchy en $(F\ d)$ lo cual implica que tiene limite en F ya que ese espacio es completo por hipotesis O sea que $x \in F$

Por lo tanto tenemos que $\overline{F} \subset F$ es decir $F = \overline{F}$

Teorema 2 6 6 Si $F \subset \mathbb{R}^k$ es cerrado entonces $(F\ d)$ es completo

Demostracion Sea $\{x\}$ una sucesion de Cauchy en $(F\ d)$

Luego $\{x\}$ es una sucesion de Cauchy en $(\mathbb{R}^k\ d)$ y como este es completo $\{x\}$ es convergente a un punto $x \in \mathbb{R}^k$

Pero $\{x\}$ esta en F lo cual implica que $x \in \overline{F}$ o sea que $x \in F$ ya que F es cerrado

En resumen $\{x\}$ tiene limite en F es decir es convergente en $(F\ d)$

Corolario 2 6 1 En $\mathbb{R}^k$ el subespacio $(F\ d)$ es completo si y solo si F es cerrado

CAPÍTULO III
EL CONCEPTO DE COMPACIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

Demostración: Sea A un conjunto infinito y acotado en $\mathbb{R}^k$. Luego, A es relativamente compacto. Su clausura $\overline{A}$ es compacta y, por tanto, BW. Pero A es un subconjunto infinito de $\overline{A}$, luego admite algún punto de acumulación (en $\overline{A}$).

2.6 COMPLETITUD

Teorema 2.6.1: El conjunto de los números reales es un espacio métrico completo.

Demostración: Sea $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ una sucesión de Cauchy en la recta real y designemos por $\mathbb{R}_0$ su rango. Luego, $\mathbb{R}_0$ es un conjunto acotado. Sabemos que esto equivale, en la recta real, a decir que $\mathbb{R}_0$ está acotado superior e inferiormente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ cotas inferior y superior de $\mathbb{R}_0$, respectivamente. Entonces,

$$a \le x_n \le b \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, designemos por $\mathbb{R}_n$ al rango de la sucesión $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ y construyamos la sucesión $\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ tal que

$$y_n = sup\, \mathbb{R}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_{n+1} \subset \mathbb{R}_n$, lo cual implica que $y_{n+1} \le y_n$, o sea que la sucesión $\{y_n\}$ es decreciente.

Definición 3.1.3: Sea X un conjunto y S una colección de subconjuntos de X. Decimos que S tiene la propiedad de intersección finita si y sólo si, para todo subconjunto finito no vacío $\mathscr{F}$ de S, se tiene que $\bigcap\mathscr{F} \neq \phi$.

3.2 CRITERIOS DE COMPACIDAD

Teorema 3.2.1: Sea X un espacio métrico no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) (Criterio cubrimiento abierto). Todo cubrimiento abierto para X tiene un subcubrimiento finito.

(ii) (Criterio de cubrimiento por bolas abiertas). Todo cubrimiento de X por bolas abiertas tiene un subcubrimiento finito.

(iii) (Criterio de las intersecciones finitas). Toda colección de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

(iv) (Criterio de Cantor). Cada encaje de subconjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

(v) (Criterio de las sucesiones de Cantor). Toda sucesión $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene intersección no vacía.

(vi) (Criterio de Convergencia) Toda sucesion en X tiene una subsucesion que converge en X

(vii) (Criterio Espacial) X es completo y totalmente acotado

$(viii)$ (Criterio BBW) X es acotado y tiene la propiedad del punto mas cercano

(ix) (Criterio de Conjunto de Cantor) X es una imagen continua del conjunto de Cantor

(x) (Criterio de limite alcanzado) Toda funcion continua real definida sobre X es acotada y alcanza sus limites

Demostracion

Que (i) implica (ii) es claro

Supongamos que X satisface (ii) y que $\mathscr{F}$ es una coleccion de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap \mathscr{F} = \phi$ Entonces $X = \bigcup\{F \quad F \in \mathscr{F}\}$

Asi la coleccion $\{b[a \; dist(a \; F) \quad F \in \mathscr{F} \quad a \in F \;]\}$ de bolas de X cubre a X por hipotesis tiene un subcubrimiento finito para X y por lo tanto existe un subconjunto finito no vacio $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ tal que $\bigcup\{F \quad F \in \mathscr{G}\} = X$ Entonces

$\bigcap \mathcal{C} = \phi$, así que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de intersección finita. Por lo tanto, (ii) implica (iii).

Ahora supongamos que X satisface (iii).

Supongamos que $\mathcal{N}$ es un encaje de subconjuntos cerrados no vacíos de X. La intersección de cualquier número finito no nulo de miembros de $\mathcal{N}$ es igual al más pequeño de ellos y por lo tanto, no es vacío. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Por hipótesis, $\bigcap \mathcal{N} \neq \phi$. Así, X satisface (iv).

Si X satisface (iv), entonces claramente satisface (v).

Supongamos que X satisface (v).

Sea $x = \{x_n\}$ es una sucesión en X. Entonces por hipótesis, el encaje $\left\{\overline{Cola_n\{x\}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene intersección no vacía, así que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

Así, se deduce que X satisface (vi).

Supongamos que X satısface $(vı)$ Entonces toda sucesıon en X tıene una subsucesıon convergente que es por lo tanto de Cauchy ası X es totalmente acotado Ademas toda sucesıon de Cauchy en X tıene una subsucesıon convergente y por lo tanto converge por consıguıente X es completo Ası X satısface $(vıı)$

Que $(vıı)$ y $(vııı)$ son equıvalentes se deduce facılmente e ımplıcan $(ıx)$

Supongamos que X satısface $(ıx)$ y que $g\ \mathcal{K} \rightarrow X$ es una funcıon contınua del Conjunto de Cantor sobre X Supongamos que $f\ X \rightarrow \mathbb{R}$ es contınua Entonces $f \circ g$ es contınua Su domınıo $\mathcal{K}$ es un subconjunto acotado cerrado de $\mathbb{R}$ ası su mayor rango $f(X)$ tambıen es un subconjunto acotado cerrado de $\mathbb{R}$ y alcanza sus lımıtes

Por lo tanto X satısface (x)

Supongamos que X satısface (x) Entonces cualquıer funcıon puntual dada de X es acotada ası que X es acotado y cada funcıon puntual alcanza su valor mınımo de modo que X tıene la propıedad del punto mas cercano Estos dos hechos junto con el crıterıo de Cauchy aseguran que X es totalmente acotado

Sea $\mathcal{U}$ un cubrımıento abıerto para X Mostraremos que $\mathcal{U}$ tıene un subcubrımıento fınıto

Definamos $u\ X \to \mathbb{R}^{\oplus}$ sea $u(x) = \sup\{dist(x\ U^{c}\ U \in\ \mathcal{U}\ )\}$ para cada $x \in X$ Es facil comprobar que u es continua Por hipotesis u alcanza su valor minimo en algunos $w \in X$ Hagamos $u(w) = r$ Si $r = 0$ deberiamos tener $dist(w\ U\ ) = 0$ y por lo tanto $w \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$ porque tal U son todos cerrados en X produciendo la contradiccion $w \notin \bigcup\mathcal{U}$ Asi que $r > 0$ Como r es el valor minimo de u se deduce que para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $b[x\ r] \subseteq U$ Como X es totalmente acotado una coleccion finita de tales bolas cubre a X de modo que un subconjunto finito correspondiente de $\mathcal{U}$ tambien cubre X Asi (x) implica (i) y la prueba es completa

Observacion Podemos decir que un espacio metrico es compacto si y solo si es vacio o satisface algunos de los criterios enumerados en el Teorema 3 2 1

Definicion 3 2 1 Un espacio metrico S es compacto si y solo si todo cubrimiento abierto para X tiene un subcubrimiento finito

Observación: Esta es una formulación que es aplicable en áreas más abstractas de la Matemática; además, puesto que está expresada en términos de conjuntos abiertos, deja claro que la compacidad se preserva cuando la métrica es reemplazada por cualquier otra métrica que produzca la misma topología.

Ejemplo 3.2.1: Los intervalos cerrados $[a,b]$ de la línea real son compactos: ya que son completos y totalmente acotados. Intervalos no acotados $[a,\infty)$ o $(-\infty,b]$ no son compactos porque no son acotados.

Ejemplo 3.2.2: Discos cerrados $b[z;r]$ del plano complejo son compactos: ya que son completos y totalmente acotados. Por supuesto, el conjunto de Cantor es compacto. La línea real es completa pero no compacta; el conjunto $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$ es totalmente acotado pero no compacto.

Sabemos que cada espacio métrico se puede completar, un hecho que es útil debido a las propiedades agradables que disfrutan los espacios completos. Podría ser deseable poder hacer algo similar con la compacidad. Después de todo, todo espacio métrico compacto es completo, y los espacios compactos tienen propiedades aún más agradables que los completos. ¿Pueden compactificarse todos los espacios métricos? ¿Pueden extenderse de alguna manera juiciosa para que la extensión sea un espacio métrico compacto? La respuesta es casi siempre no, por la sencilla razón de que los espacios métricos compactos son pequeños: dado que cada espacio métrico totalmente acotado está en correspondencia uno a uno con un subconjunto de Cantor, pueden tener una cardinalidad no mayor que la de $\mathbb{R}$.

Así, los espacios métricos que tienen una cardinalidad mayor que la de $\mathbb{R}$ no son subespacios métricos de ningún espacio métrico compacto.

3.3 SUBCONJUNTOS COMPACTOS

Un subconjunto de un espacio métrico se dice que es un subconjunto compacto si es un espacio compacto. Así, como completitud y conexidad, la compacidad es una propiedad intrínseca de un espacio métrico y es independiente de cualquier superespacio en el que se considere residir. Es útil saber; sin embargo, que el criterio de cubrimientos abiertos puede ser probado usando cubiertas por subconjuntos abiertos de cualquier superespacio de dicha métrica en lugar de por subconjuntos abiertos del propio subespacio.

Definición 3.3.1: Un subconjunto S de un espacio métrico X se llama un subconjunto compacto de X si, y sólo si, el subespacio S de X es compacto.

Teorema 3.3.1: Un subconjunto S de un espacio métrico X es compacto si, y sólo si, todo cubrimiento abierto para S en X tiene un subcubrimiento finito.

Demostración: Supongamos que S es un subconjunto compacto de X y que $\mathscr{C}$ es un cubrimiento abierto para S en X.

Entonces $\{U \cap S : U \in \mathscr{C}\}$ es un cubrimiento abierto para S en S; así, por definición, existe un subconjunto finito $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}$ tal que $\{U \cap S : U \in \mathscr{F}\}$ que cubre a S. Entonces $\mathscr{F}$ es un subcubrimiento finito de $\mathscr{C}$ para S en X.

Por el contrario, supongamos que todo cubrimiento abierto para S en X tiene un subcubrimiento finito.

Supongamos que $\mathscr{G}$ es un cubrimiento abierto para S en S.

Cada miembro de $\mathscr{G}$ se puede escribir como $S \cap W$ para algún subconjunto abierto W de X. El conjunto $\{W \subseteq X : W \text{ es abierto en } X,\ S \cap W \in \mathscr{G}\}$ es un cubrimiento abierto para S en X y así tiene un subcubrimiento finito $\mathscr{F}$. Entonces, $\{S \cap W : W \in \mathscr{F}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathscr{G}$ para S en S, así S es un subconjunto compacto de X.

Teorema 3.3.2: Suponga que X es un espacio métrico compacto y S es un subconjunto de X. Entonces S es compacto si, y sólo si, S es cerrado en X.

Demostración: S hereda total acotación de X; así, por el criterio espacial del Teorema 3.2.1, S es compacto si, y sólo si, S es completo, que ocurre si y sólo si, S es cerrado en X ,porque X es completo.

3.4 COMPACIDAD Y CONTINUIDAD

Gran parte de la importancia de los espacios métricos compactos se centra en el modo en que las funciones continuas se comportan sobre ellos. Sabemos que cada función continua en un espacio métrico compacto es automáticamente uniformemente continua y que toda imagen continua de un conjunto compacto es compacta.

Probaremos que cada función inyectiva continua sobre un conjunto compacto tiene inversa continua.

Teorema 3.4.1: Suponga que X y Y son espacios métricos, X es compacto y $f: X \to Y$ es continua. Entonces f es uniformemente continua sobre X y el subespacio $f(X)$ de Y es compacto.

Demostración: Daremos una prueba directa de la segunda afirmación utilizando cubrimientos abiertos.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es un cubrimiento abierto para $f(X)$.

Entonces $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{G}\}$ es un cubrimiento abierto para X porque f es continua. Como X es compacto, existe un subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ tal que

$\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{F}\}$ cubre a X.

Entonces $\mathcal{F}$ cubre a $f(X)$. Así, $f(X)$ satisface el criterio de cubrimiento abierto para compacidad y es por lo tanto compacto.

Si X y Y son espacios métricos, la notación $\mathcal{C}(X,Y)$ es usada para el espacio de todas las funciones continuas acotadas de X en Y.

Sabemos que si X es compacto, entonces todas las funciones continuas de X en Y tienen rango compacto y por lo tanto, automáticamente acotado. Así, cuando X es compacto, $\mathcal{C}(X,Y)$ comprende todas las funciones continuas de X en Y; además, ellas son todas uniformemente continua.

El conocido Teorema de Valor Extremo, que establece que cada función continua real definida sobre $[0,1]$ alcanza sus límites, puede verse como un simple corolario del hecho de que las imágenes continuas de conjuntos compactos son siempre compactas. Además, es fácil de creer a partir de imágenes que tal función, si es inyectiva, tiene una inversa continua desde su rango sobre $[0,1]$. Esto, también, es una aplicación especial del siguiente teorema general.

Teorema 3.4.2 (Teorema Función Inversa): Supongamos que X y Y son espacios métricos y X es compacto. Suponga que $f: X \to Y$ es inyectiva y continua. Entonces $f^{-1}: ran(f) \to X$ es uniformemente continua.

Demostración: Supongamos que S es un subconjunto cerrado de X. Entonces S es compacto y su imagen continua $f(S)$ es compacta. Por lo tanto, cerrado en $f(X)$.

Pero $f(S)=(f^{-1})^{-1}(S)$. Como S es un subconjunto cerrado arbitrario de X, f^{-1} es continua.

Que f^{-1} es uniformemente continua se deduce del Teorema 3.4.1 porque el dominio de f^{-1} es $f(X)$, que es compacto.

3.5 UNIONES E INTERSECCIONES DE SUBCONJUNTOS COMPACTOS

Como podríamos esperar de estudiar conjuntos cerrados y conjuntos completos, la compacidad se preserva bajo uniones finitas y bajo intersecciones arbitrarias. Y cada encaje de conjuntos compactos no vacíos tiene intersección no vacía.

Teorema 3.5.1: Supongamos que X es un espacio métrico y $\mathcal{C}$ es una colección no vacía de subconjuntos compactos de X.

Entonces:

(i) $\bigcap \mathcal{C}$ es un subconjunto compacto de X.

(ii) Si $\mathcal{C}$ es finito, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto compacto de X.

Demostración:

Como todo miembro de $\mathcal{C}$ es cerrado en X, también es cerrado $\bigcap \mathcal{C}$; además, siendo un subconjunto cerrado de cualquier miembro individual de $\mathcal{C}$, es compacto.

Para (ii), si $\mathcal{C}$ es finito, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es completo y totalmente acotado y por lo tanto, es compacto.

Ejemplo 3.5.1: Toda unión finita de intervalos cerrados acotados es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ en sí mismo, no es compacto, puede ser expresado como la unión contable $\bigcup\{[n,n+1]:n\in\mathbb{Z}\}$ de intervalos cerrados acotados, por lo que la finitud de $\mathcal{C}$ no se puede eliminar en el Teorema 3.5.1.

Teorema 3.5.2: Suponga que X es un espacio métrico y $\mathcal{C}$ es una colección no vacía de subconjuntos compactos de X.

Suponga que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Entonces $\bigcap \mathcal{C}\neq\phi$. En particular, cada encaje de subconjuntos compactos no vacíos de X tiene intersección no vacía.

Demostración: Sea $A \in \mathcal{C}$. Entonces $\{A \cap C : C \in \mathcal{C}\}$ es una colección de subconjuntos cerrados no vacío del espacio métrico compacto A y tiene la propiedad de intersección finita. Así que $\bigcap\{A \cap C : C \in \mathcal{C}\}$ es no vacía, de donde $\bigcap \mathcal{C}$ es no vacía.

3.6 COMPACIDAD DE PRODUCTOS

Un producto finito de espacios métricos compactos es compacto si el producto conserva la métrica: es completo y totalmente acotado. Sabemos, sin embargo, que ni la completitud, ni ser totalmente acotado, ni tampoco la propiedad del punto más cercano, necesitan conservarse cuando el producto está dotado con una métrica de producto arbitrario. A pesar de estas deficiencias, la compacidad se preserva bajo cada métrica del producto.

Lema 3.6.1: Suponga que A y B son espacios métricos compactos y dotan a $A \times B$ con la métrica producto. Entonces $A \times B$ es compacto.

Demostración:

Supongamos que $\{(a_n,\ b_n)\}$ es una sucesión arbitraria en $A \times B$. Como A es compacto, $\{a_n\}$ tiene una subsucesión $\{a_{m_n}\}$ que converge en A. Entonces, como B es compacto, $\{b_{m_n}\}$ tiene una subsucesión $\{b_{p_{m_n}}\}$ que converge en B, por lo tanto, $\{a_{p_{m_n}}\}$ converge en A, Así que, $\{(a_{p_{m_n}}, b_{p_{m_n}})\}$ es una subsucesión de $\{(a_n, b_n)\}$ que converge en $A \times B$.

Entonces, $A \times B$ satisface el criterio de convergencia para compacidad y es, por lo tanto, compacto.

Teorema 3.6.1: Suponga $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}_n$, (X_i, τ_i) es un espacio métrico no vacío. Dotemos el producto $P = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ con cualquier métrica producto. Entonces, P es compacto, si y sólo si, X_i es compacto para todo $i \in \mathbb{N}_n$.

Demostración: Si todos los espacios de coordenadas son compactos, la compacidad de P se deduce de un número finito de aplicaciones del Lema 3.6.1. Si P es compacto, entonces cada espacio de coordenadas, siendo la imagen de P bajo la función proyección apropiada, es compacto; porque las proyecciones son todas continuas.

3.7 COMPACIDAD Y PUNTOS MÁS CERCANOS.

Sabemos ahora que la propiedad de punto más cercano está entre la completitud y la compacidad todo espacio metrico compacto tiene la propiedad del punto mas cercano y todo espacio metrico con la propiedad del punto mas cercano es completo

Ademas el concepto de compacidad nos da algunas caracteristicas mas de la propiedad de punto mas cercano

Teorema 3 7 1 Sea X un espacio metrico Los siguientes enunciados son equivalentes

(i) X tiene la propiedad del punto mas cercano

(ii) Todo subconjunto cerrado acotado de X es compacto

(iii) Toda bola cerrada de X es compacta

Demostracion Si $X = \varnothing$ los enunciados son trivialmente ciertos asi que supongamos lo contrario

Supongamos que X tiene la propiedad del punto mas cercano y que S es un subconjunto cerrado acotado de X Estando cerrado S tiene la propiedad del punto mas cercano estando tambien acotado S es compacto Asi que (i) implica (ii) Que (ii) implica (iii) es claro porque toda bola cerrada es cerrada y acotada

Por ultımo supongamos que X satısface $(\imath\imath\imath)$

Sea $\{x\}$ cualquıer sucesıon acotada en X Entonces exıste una bola cerrada B de X que ıncluye $\{x \quad n \in \mathbb{N}\}$ Pero B es compacto por hıpotesıs ası que $\{x\}$ tıene una subsucesıon que converge en B y por lo tanto en X Como $\{x\}$ es una sucesıon acotada arbıtrarıa en X entonces X tıene la propıedad del punto mas cercano

3 8 COMPACIDAD LOCAL

La lınea real no es compacta pero tıene la propıedad de punto mas cercano – sus subconȷuntos cerrados acotados son compactos – lo que sıgnıfıca que la teorıa de la compacıdad es aplıcable en un sentıdo local a $\mathbb{R}$

Por ser una propıedad algo mas debıl que la propıedad de punto mas cercano da derecho a que un espacıo metrıco sea llamado localmente compacto

Teorema 3 8 1 Sea X un espacıo metrıco y $x \in X$ Los sıguıentes enuncıados son equıvalentes

$(\imath)$ Exıste $r \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $b[x \quad s]$ es compacto para todo $s \in (0 \quad r]$

(ii) Existe una bola cerrada de X centrada en x que es compacta

(iii) Existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $\overline{U}$ es compacto

(iv) Existe un subconjunto abierto U y un subconjunto compacto K de X tal que $x \in U \subseteq K$

Demostracion

Si (i) se verifica entonces (ii) se cumple trivialmente

Si (ii) se satisface sea $r \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $b[x\ r]$ es compacto y sea $U = b[x\ r]$ entonces U es abierto $x \in U$ y $Cl_X(U)$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $b[x\ r]$ y asi es compacto Asi (iii) se satisface

Que (iii) implica (iv) es claro

Finalmente supongamos que (iv) se satisface y sea U un subconjunto abierto de X y K un subconjunto compacto de X con $x \in U \subseteq K$ Como U es abierto existe $r \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $b[x\ 2r] \subseteq U$ Entonces para cada $s \in [0\ r]$ $b[x\ s]$ es un subconjunto cerrado de $Cl_X(U)$ y por lo tanto de K y asi es compacto Asi (i) tambien se satisface

Definicion 3 8 1 Un espacio metrico X se dice que es localmente compacto si y solo si para cada $x \in X$ existe un subconjunto abierto U de X y un subconjunto compacto de K de X tal que $x \in U \subseteq K$

Observacion Un espacio metrico X es localmente compacto si y solo si todo $x \in X$ satisface cualquiera de los criterios enumerados en el Teorema 3 8 1

Ejemplo 3 8 1 Todo espacio metrico discreto X es localmente compacto ya que cada subconjunto unitario es tanto abierto como compacto Si X es infinito y tiene la metrica discreta entonces todas las bolas cerradas de radio menor que 1 siendo conjuntos unitarios son compactos todas las otras bolas siendo igual a X son no compactas

Ejemplo 3 8 2 Todo espacio metrico compacto es abierto en si mismo y compacto y asi es necesariamente localmente compacto Si un espacio metrico X tiene la propiedad de punto mas cercano entonces toda bola cerrada de X es compacta asi que X es ciertamente localmente compacto La inversa directa no es cierta porque los espacios localmente compactos no necesitan ser completos necesitan tener la propiedad de punto mas cercano En efecto todo conjunto infinito con la metrica discreta es completo y localmente compacto pero no tiene la propiedad de punto mas cercano

Por lo tanto, la existencia de los puntos más cercanos no está garantizada en espacios localmente compactos completos.

Ahora bien: ¿Qué subespacios de espacios localmente compactos son localmente compactos? No todos: el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ no es localmente compacto; en efecto, no existen subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathbb{Q}$ con cerradura compacta en $\mathbb{Q}$. Los subconjuntos cerrados de espacios localmente compactos son localmente compactos; curiosamente también lo son los subconjuntos abiertos.

Teorema 3.8.2: Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto y $\widetilde{X}$ es una completación de X. Entonces la copia isométrica designada de X en $\widetilde{X}$ es abierta en $\widetilde{X}$.

Demostración: Debido a que las copias designadas de X en diferentes completaciones son isométricas con respecto a una isometría entre las completaciones mismas, podemos asumir que $\widetilde{X}$ es el conjunto $\delta(X)\cup vp(X)$, donde $\delta(X)$ es la copia isométrica de X y la métrica es $s:(u,v)\to \sup\{|u(x)-v(x)|:x\in X\}$. Sea $z\in X$. Como X es localmente compacto, existe $r\in\mathbb{R}^{+}$ tal que $b_X[z;r]$ es compacta. Afirmamos que $b_{\widetilde{X}}[\delta_z;r]\subseteq\delta(X)$.

Sea $u \in b_{\widetilde{X}}[\delta_z; r)$.

Entonces $u(z) = u(z) - \delta_z(z) \le s(u, \delta_z) < r$.

Note que, para todo $x \in X \setminus b_X[z; r]$, tenemos que

$$u(x) \ge d(x,z) - \mu(z) > r - \mu(z),$$

así que

$$\inf \mu(X \setminus b_X[z; r]) \ne 0.$$

Pero $\inf \mu(X) = 0$ por definición, así $\inf \mu(b_X[z; r]) = 0$.

La bola $b_X[z; r]$ es compacta, así que μ alcanza su valor mínimo en él, forzando $0 \in ran(\mu)$. Así $\mu \in \delta(X)$, como afirmamos. Como z es arbitrario en X, se deduce que $\delta(X)$ es abierto en la completación $\widetilde{X}$.

Ejemplo 3.8.3: Todo espacio métrico localmente compacto es un espacio de Baire. Se puede probar usando el hecho que acabamos de demostrar en que todo espacio métrico localmente compacto es isométrico a un subconjunto abierto de su completación porque cada subconjunto abierto de un espacio métrico completo es un espacio de Baire.

3 9 SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE ESPACIOS DE FUNCIONES

Una caracteristica comun de los subconjuntos compactos es que son cerrados y acotados en espacios metricos que tienen la propiedad de punto mas cercano solo eso es suficiente para identificarlos Pero incluso el espacio $\mathcal{C}([0\ 1])$ siendo infinito dimensional no tiene la propiedad de punto mas cercano en dichos espacios de funciones el criterio estandar para compacidad esta dado por un teorema mas fuerte el Teorema Arzela – Ascoli

Teorema 3 9 1 Sea X un conjunto no vacio $(Y\ e)$ un espacio metrico y $S \subseteq B(X\ Y)$ Para cada $x \in X$ sea x la funcion $f \to f(x)$ definida sobre S y sea $X = \{x\ \ x \in X\} \subseteq B(S\ Y)$ y X es totalmente acotado Entonces S es totalmente acotado en $B(X\ Y)$ si y solo si $x(S)$ es totalmente acotado en Y para todo $x \in X$

Demostracion

Si S es totalmente acotado entonces $x(S)$ es totalmente acotado para cada $x \in X$ porque las funciones x son todas uniformemente continuas

Por otro lado sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ y supongamos que para todo $x \in X$ $x(S)$ es totalmente acotado en Y Como X es totalmente acotado existe $k \in \mathbb{N}$ y un subconjunto finito $\{z \quad \imath \in \mathbb{N}_k\}$ de X tal que $X \subseteq \bigcup\left\{b_{B(S\ Y)}\left[z \quad \tfrac{}{3}\right) \ \imath \in \mathbb{N}_k\right\}$ Sea $\{g \ \}$ una sucesion arbitraria en S Por hipotesis $z_1(S)$ es totalmente acotado en Y asi que la sucesion $\{g \ (z_1)\}$ tiene una subsucesion de Cauchy digamos $\{g_{\imath} \ (z_1)\}$ similarmente la sucesion $\{g_{\imath} \ (z_2)\}$ tiene una sucesion de Cauchy digamos $\{g \ (z_2)\}$ y observamos que $\{g \ (z_1)\}$ siendo una subsucesion de $\{g_{\imath} \ (z_1)\}$ es tambien de Cauchy Repitiendo este argumento para cada miembro del conjunto finito $\{z \quad \imath \in \mathbb{N}_k\}$ llegamos al final a una subsucesion $\{g_m \ \}$ de $\{g \ \}$ tal que $\{g_m \ (z \ )\}$ es de Cauchy en Y para cada $\imath \in \mathbb{N}_k$ Debido a que estas sucesiones son de Cauchy y $\mathbb{N}_k$ es finito existe $\jmath \in \mathbb{N}_k$ tal que para todo $\imath \in \mathbb{N}_k$ tenemos que $g_m \ (z \ ) \in b_Y\left[g_m \ (z \ ) \quad \tfrac{}{3}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \jmath$ Pero los z fueron escogidos para que para cada $x \in X$ existe $\imath \in \mathbb{N}_k$ tal que $e\left(f(x) \quad f(z \ )\right) < \tfrac{}{3}$ para todo $f \in S$

Por lo tanto $g_m \ (x) \in b_Y\left[g_{m_j}(x) \quad \varepsilon\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \jmath$ y para todo $x \in X$ de donde $g_m \ \in b_S\left[g_{m_j} \quad \varepsilon\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \jmath$

Como ε es arbitrario en $\mathbb{R}^+$, $\{g_{m_n}\}$ es de Cauchy. Como $\{g_n\}$ es una sucesión arbitraria en S, esto establece que S es totalmente acotada.

Corolario 3.9.1 (Arzelá – Ascoli Teorema): Sea (X,d) un espacio métrico compacto y (Y,e) un espacio métrico con la propiedad de punto más cercano. Sea S un subconjunto acotado cerrado de $\mathcal{C}(X,Y)$. Para cada $x \in X$, definamos $\hat{x}: S \to Y$ por $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in S$ y sea $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$. Entonces:

(i) $\hat{X} \subseteq B(S,Y)$; en otras palabras, las funciones $\hat{x}$ son todas acotadas.

(ii) S es compacto si y sólo si, la función $x \to \hat{x}$ de X a $B(S,Y)$ es continua.

Demostración: Para cada $x \in X$, la función $\hat{x}$ es acotada ya que S es acotado, así que $\hat{X} \subseteq B(S,Y)$, lo cual prueba (i).

Para la implicación directa en (ii), supongamos que S es compacto, $z \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Porque S es totalmente acotado, existe $k \in \mathbb{N}$ y un subconjunto finito $\{g_i : i \in \mathbb{N}_k\}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ tal que $S \subseteq \bigcup\left\{b_{C(X,Y)}\left[g_i; \frac{\varepsilon}{3}\right) : i \in \mathbb{N}_k\right\}$.

Como las g_i son continuas en z y sólo hay un número finito de ellas, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, para todo $x \in X$ con $d(z,x) < \delta$, tenemos que $e(g_i(z), g_i(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$

para todo $i \in \mathbb{N}_k$, y se sigue que $e(f(z), f(x)) < \varepsilon$ para todo $f \in S$ porque $S \subseteq \bigcup\left\{b_{C(X,Y)}\left[g_i; \frac{\varepsilon}{3}\right) : i \in \mathbb{N}_k\right\}$. Esto da entonces $s(\hat{z}, \hat{x}) \leq \varepsilon$, donde s denota la métrica del supremo en $B(S,Y)$. Así, la función $x \to \hat{x}$ es continua en z y, como z es arbitrario en X, es una función continua.

Para implicación hacia atrás en (ii), supongamos que $x \to \hat{x}$ es continua. Entonces su rango $\hat{X}$ es, como su dominio X, compacto y por lo tanto, totalmente acotado. Además, para cada $x \in X$, $\hat{x}(S)$, siendo acotado en Y por (i), es totalmente acotado porque Y tiene la propiedad del punto más cercano. Del Teorema 3.9.1 se deduce que S es totalmente acotado. También, $\mathcal{C}(X,Y)$ es completo porque Y es completo, así que S, siendo cerrado en $\mathcal{C}(X,Y)$, es también completo. S, siendo completo y totalmente acotado, es compacto.

BIBLIOGRAFÍA

1 ALIPRANTIS C D BURKINSHAW O 1998 *Principles of Real Analysis* Third Edition Academic Press San Diego 424 pags

2 ARMSTRONG M A 1983 *Basic Topology* First Edition Springer Verlag London 261 pags

3 AULL C E & LOWEN R 1997 *Handbook of the History of General Topology Volumen I* First Edition Kluwer Academic Publishers New York 381 pags

4 AULL C E & LOWEN R 1998 *Handbook of the History of General Topology Volumen II* First Edition Kluwer Academic Publishers New York 405 pags

5 AULL C E & LOWEN R 2001 *Handbook of the History of General Topology Volumen III* First Edition Kluwer Academic Publishers New York 418 pags

6 BOYER C B & MERZBACH U C 2011 *A History of Mathematics* Third Edition John Wiley & Sons Inc New Jersey 690 pags

7 COHEN G 2003 A Course in Modern Analysis and its Application First Edition Cambridge University Press New York 349 pags

8 CONWAY J B 2012 *A Course in Abstract Analysis* First Edition American Mathematical Society Providence Rhode Island 385 pags

9 CONWAY J B 2014 *A Course in Point Set Topology* First Edition Springer International Publishing Switzerland 154 pags

10 FOLLAND G B 1984 *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications* John Wiley & Sons New York 368 pags

11 FRIEDMAN A 1970 *Foundations of Modern Analysis* Dover Publications

Inc New York 258 pags

12 GAMELIN T W GREENE R E 1983 *Introduction to Topology* Saunders College Publishing New York 347 pags

13 GARLING D J H 2013 *A Course in Mathematical Analysis Volume I Foundations and Elementary Real Analysis* First Edition Cambridge University Press New York 318 pags

14 GRAY J 2015 *The Real and the Complex A History of Analysis in the 19th Century* First Edition Springer Verlag London 350 pags

15 KLEINER I 2012 *Excursions in the History of Mathematics* First Edition Birkhauser Boston 334 pags

16 KNAPP A W 2005 *Basic Real Analysis* First Edition Birkhauser Boston 670 pags

17 KREYSZIG E 1978 *Introductory Functional Analysis with Applications* First Edition John Wiley & Sons New York 706 pags

18 LANG S 1996 *Real and Functional Analysis* Third Edition Springer Verlag New York 596 pags

19 LITTLE C H C TEO K L BRUNT B V 2015 *Real Analysis via Sequences and Series* First Edition Springer Verlag London 483 pags

20 MANETTI M 2015 *Topology* First Edition Springer International Publishing Switzerland *315 págs*

21 RAMAN SUNDSTROM M *A Pedagogical History of Compactness* Amer Math Monthly 122 (2015) 619 635

22 RODRÍGUEZ Y Julio 2017 *Historia de la Nocion de Compacidad* Herrera Panama Monografia Universidad de Panama Herrera 30 pags

23. ROYDEN, H.L. 1988. *Real analysis*. Third Edition. The Macmillan Company, London, 353 págs.

24. SEARCOID, M. 2007. *Metric Spaces*. First Edition. Springer-Verlag, London, 320 págs.

25. SHIRALI, S., VASUDEVA, H.L. 2006. *Metric Spaces*. First Edition. Springer-Verlag, London, 229 págs.

26. TAO, T. 2006. *Analysis I*. First Edition. Hindustan Book Agency. New Delhi, India. *423 págs.*

27. WILANSKY, A. 1970. *Topology for Analysis*. First Edition. Ginn and Company, London, 398 págs.