Tecnociencia 2013, Vol. 15, N° 1.

EXISTENCIA DE UNA FUNCIÓN NO LINEAL, CONTINUA Y BIYECTIVA EN l^2 CON INVERSA DISCONTINUA EN TODO PUNTO

Jorge E. Hernández U.[1], Temístocles Zeballos M.[2]

[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. email: edithleco@gmail.com

[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática. email: temizeballos@gmail.com

RESUMEN

En el presente trabajo se utiliza la función de Mazur para probar la existencia de una función no lineal biyectiva y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua en todo punto. También se presenta un ejemplo, relativamente sencillo, en el caso lineal.

PALABRAS CLAVES

Espacio de Hilbert l^2, biyección continua con inversa discontinua.

ABSTRACT

In this paper the Mazur function is used to prove the existence of a nonlinear bijective and continuous function from l^2 on a subset of l^2 whose inverse is discontinuous at every point. Also a rather simple example is shown in the linear case.

KEYWORDS

Hilbert space l^2, continuous bijection with discontinuous inverse.

INTRODUCCIÓN

Los espacios de Hilbert son de vital importancia en el análisis moderno, en este trabajo vamos a limitar nuestra atención al espacio de Hilbert l^2 (Stein & Shakarchi, 2005) y al espacio de Banach l^1 (Rynne & Youngson, 2008). Como $l^1 \subset l^2$, podemos aplicar a l^1 la topología de l^2. Consideramos la función $G = F^{-1} : l^2 \to l^1 \subset l^2$ y mostramos que G es una biyección continua no lineal; sin embargo F es discontinua en todo punto de l^1.

1. EJEMPLO EN EL CASO LINEAL

A continuación presentamos un ejemplo de una función lineal continua y biyectiva cuya inversa es discontinua en todo punto.

Ejemplo: Sea $f : l^2 \to l^2$ la función definida por

$$f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left\{\frac{1}{n} x_n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Como

$$\begin{aligned} f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n}(x_n + y_n)\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \left\{\frac{1}{n} x_n\right\}_{n=1}^{\infty} + \left\{\frac{1}{n} y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) + f\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n} \lambda x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda \left\{\frac{1}{n} x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

se tiene que f es una función lineal.

Note que

$$f\left(l^2\right)=\left\{\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty}:\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in l^2\right\}=:Y$$

Notación: Para cada $x=\left(x_1,x_2,\cdots\right)\in l^2$ y $N\in\mathbb{N}$ denotemos

$$\begin{aligned} x^{[N]}&=\left(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\cdots\right)\\ x^{(N)}&=x-x^{[N]}=\left(0,\cdots,0,x_{N+1},x_{N+2},\cdots\right)\end{aligned}$$

Probemos que Y es denso en l^2. En efecto, sea $x=\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$ y definamos

$$x^{[n]}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots\right)$$

Como $z^n=\left(x_1,2x_2,\cdots,nx_n,0,0,\cdots\right)\in l^2$ y $f\left(z^n\right)=x^{[n]}$, se tiene que $x^{[n]}\in Y$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por otro lado,

$$\left\|x-x^{[n]}\right\|_2^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en l^2 y $\overline{Y}=l^2$; es decir, Y es denso en l^2.

Para cada $x=\left(x_1,x_2,\cdots\right)\in l^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|f\left(x\right)\right\|_2&=\left\|\left(x_1,\tfrac{1}{2}x_2,\cdots\right)\right\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tfrac{1}{n}x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|x\right\|_2.\end{aligned}$$

Esto implica que f es un operador lineal acotado (Maccluer, 2009) y $\|f\| \leq 1$. Así pues, f es continua en l^2.

Es claro que $f : l^2 \to Y$ es biyectiva y su inversa está definida por

$$\begin{aligned} &f^{-1} : Y \to l^2 \\ &f^{-1}\left(\left(y_1, y_2, y_3, \cdots\right)\right) = \left(y_1, 2y_2, 3y_3, \cdots\right) \end{aligned}$$

Consideremos la sucesión ortonormal $\{e_1, e_2, \cdots\}$ de l^2, entonces como

$$f\left(ne_n\right) = f\left(\left(0, 0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{ésima posición}}}{n}, 0, \cdots\right)\right) = \left(0, 0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{ésima posición}}}{1}, 0, \cdots\right) = e_n$$

se tiene que $e_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$f^{-1}\left(e_n\right) = ne_n \quad \text{y} \quad \left\|f^{-1}\left(e_n\right)\right\|_2 = n$$

de donde

$$\left\|f^{-1}\right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\|f^{-1}(x)\right\|_2 \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|f^{-1}\left(e_n\right)\right\|_2 = \infty .$$

Por lo tanto, f^{-1} es un operador lineal no acotado (Amann & Escher, 2009). Esto implica que f^{-1} es discontinua en todo punto $y \in Y$.

Observación: Recordemos que l^1 es denso en l^2 bajo la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$.

2. EJEMPLO EN EL CASO NO LINEAL

Teorema 1: Sea $G = F^{-1} : l^2 \to l^1 \subset l^2$. La inversa de la función de Mazur (1929). Para todo $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$ y $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que si $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ y $\|x - y\|_2 < \delta$, entonces:

$i)$ $|x_i| < 1$ y $|y_i| < 1$, para todo $i \geq N+1$.

$ii)$ $\left\|x^{(N)}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$.

$iii)$ $\left\|y^{(N)}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

$iv)$ $\left\|\left(G(x)\right)^{(N)} - \left(G(y)\right)^{(N)}\right\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Demostración: Como $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, existe un número natural N tal que

$$|x_i| < \tfrac{1}{2} \text{ para } i \geq N+1 \text{ y } \left\|x^{(N)}\right\|_2 < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Tomemos $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Sea $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ tal que $\|x - y\|_2 < \delta$, entonces

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta;$$

por lo tanto, para todo $i \geq N+1$ se tiene que

$$|y_i| \leq |y_i - x_i| + |x_i| < \delta + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Además,

$$\left\|x^{(N)} - y^{(N)}\right\|_2 = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

de donde

$$\left|\,\left\|x^{(N)}\right\|_2-\left\|y^{(N)}\right\|_2\,\right|\le\left\|x^{(N)}-y^{(N)}\right\|_2\le\tfrac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\left\|y^{(N)}\right\|_2\le\tfrac{\varepsilon}{4}+\left\|x^{(N)}\right\|_2<\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{4}=\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Finalmente, como $|x_i|<1,\quad |y_i|<1$ para $i\ge N+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\left(G(x)\right)^{(N)}-\left(G(y)\right)^{(N)}\right\|_2^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty}\left[\operatorname{sgn}(x_i)\,x_i^{\,2}-\operatorname{sgn}(y_i)\,y_i^{\,2}\right]^2\\ &= \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^{\,4}-2\operatorname{sgn}(x_i)\operatorname{sgn}(y_i)\,x_i^{\,2}y_i^{\,2}+y_i^{\,4}\right)\\ &\le \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^{\,4}+2x_i^{\,2}y_i^{\,2}+y_i^{\,4}\right)\\ &\le \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^{\,2}+2x_i^{\,2}+y_i^{\,2}\right)\\ &= \sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^{\,2}+2\sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^{\,2}+\sum_{i=N+1}^{\infty}y_i^{\,2}\\ &=\left\|x^{(N)}\right\|_2^2+2\left\|x^{(N)}\right\|_2^2+\left\|y^{(N)}\right\|_2^2\\ &=3\left\|x^{(N)}\right\|_2^2+\left\|y^{(N)}\right\|_2^2\\ &<3\left(\tfrac{\varepsilon^2}{16}\right)+\tfrac{\varepsilon^2}{4}=\tfrac{7\varepsilon^2}{16}<\tfrac{\varepsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\|\left(G(x)\right)^{(N)}-\left(G(y)\right)^{(N)}\right\|_2<\tfrac{\varepsilon^2}{2}\,.$$

Teorema 2: Sean $G=F^{-1}:l^2\to l^1\subset l^2$ la inversa de la función de Mazur, $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$, $\varepsilon>0$ y $N\in\mathbb{N}$. Entonces existe un $\delta>0$ tal que si $\|x-y\|_2<\delta$, entonces $\left\|\left(G(x)\right)^{[N]}-\left(G(y)\right)^{[N]}\right\|_2^2<\tfrac{\varepsilon^2}{2}$.

Demostración: Note que la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = \operatorname{sgn}(t)\, t^2$$

es continua en $\mathbb{R}$. Luego, para cada $i = 1, 2, \cdots, N$ existe un $\delta_i > 0$ tal que:

$$|x_i - t| < \delta_i \Rightarrow \left(\operatorname{sgn}(x_i)\, x_i^{\,2} - \operatorname{sgn}(t)\, t^2\right)^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2N}.$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N\}$.

Sea $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ tal que $\|x - y\|_2 < \delta$. Entonces $|x_i - y_i| < \delta$ para todo $i = 1, 2, \cdots, N$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\left(G(x)\right)^{[N]} - \left(G(y)\right)^{[N]}\right\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{N}\left(\operatorname{sgn}(x_i)\, x_i^{\,2} - \operatorname{sgn}(y_i)\, y_i^{\,2}\right)^2 \\ &< N\left(\tfrac{\varepsilon^2}{2N}\right) = \tfrac{\varepsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

Teorema 3: Sea $G = F^{-1} : l^2 \to l^1 \subset l^2$ la inversa de la función de Mazur. Entonces G es continua en l^2.

Demostración*:* Sean $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1, existe un número $N \in \mathbb{N}$ y $\delta_1 > 0$ tal que

$$y \in l^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta_1 \Rightarrow \left\|\left(G(x)\right)^{(N)} - \left(G(y)\right)^{(N)}\right\|_2^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Luego, por el Teorema 2, existe un δ_2 tal que

$$y \in l^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta_2 \Rightarrow \left\|\left(G(x)\right)^{[N]} - \left(G(y)\right)^{[N]}\right\|_2^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego, si $y \in l^2, \|x - y\|_2 < \delta;$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|G(x)-G(y)\|^2 &= \left\|(G(x))^{(N)}+(G(x))^{[N]}-(G(y))^{(N)}-(G(y))^{[N]}\right\| \\
&\leq \left\|(G(x))^{(N)}-(G(y))^{(N)}\right\|+\left\|(G(x))^{[N]}-(G(y))^{[N]}\right\| \\
&< \tfrac{\varepsilon^2}{2}+\tfrac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, G es continua en x, para todo $x \in l^2$.

Teorema 4: Sea $F: l^1 \subset l^2 \to l^2$ la función de Mazur (1929). Entonces F es discontinua en x, para todo $x \in l^1$.

Demostración: Sea $x=(x_1, x_2, \cdots) \in l^1$ y $\delta > 0$. Probemos que existe un punto $y \in l^1$ tal que $\|x-y\|_2 < \delta$ y $\|F(x)-F(y)\|_2 > \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$. Note que la función

$$
\begin{aligned}
&g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&g_n(t) = \sqrt{|t|+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{|t|}
\end{aligned}
$$

es continua en $\mathbb{R}$. Luego, $\lim_{t\to 0} g_n(t) = g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Por lo tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $g(t) > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ siempre que $|t| < \varepsilon$.

Como $x=(x_1, x_2, \cdots) \in l^1$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$; lo que implica que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i| < \varepsilon$, siempre que $i > N$.

Definamos la sucesión $y=(y_1, y_2, \cdots)$ por

$$
y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\operatorname{sgn}(x_i)}{n}, & \text{si } N+1 \leq i \leq N+n \\ x_i & \text{, en los otros casos} \end{cases}
$$

Como $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$ y $y=(y_1,y_2,\cdots)$ sólo difieren en una cantidad finita de términos, se tiene que $y\in l^1$.

Note que $\operatorname{sgn}\left(t+\frac{\operatorname{sgn}(t)}{n}\right)=\operatorname{sgn}(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\operatorname{sgn}(x_i)=\operatorname{sgn}(y_i)$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Además,

$$\|x-y\|_2^2=\sum_{i=N+1}^{N+n}\frac{(-\operatorname{sgn}(x_i))^2}{n^2}=n\left(\tfrac{1}{n^2}\right)=\tfrac{1}{n}<\delta^2$$

de donde

$$\|x-y\|_2<\delta .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|F(x)-F(y)\|_2^2 &= \left\|\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{2}},\cdots\right)-\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^{\frac{1}{2}},\cdots\right)\right\|_2^2\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{2}}-\operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{\left|x_i+\tfrac{\operatorname{sgn}(x_i)}{n}\right|}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{|x_i|+\tfrac{1}{n}}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|+\tfrac{1}{n}}-\sqrt{|x_i|}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(g_n(x_i)\right)^2\\
&>\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2,\ \text{ya que } |x_i|<\varepsilon\\
&=n\left(\tfrac{1}{4n}\right)\\
&=\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

de donde, $\|F(x)-F(y)\|_2>\frac{1}{2}$.

De todo lo anterior se deduce que F es discontinua en x, para todo $x\in l^1$.

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1: Sea $G = F^{-1} : l^2 \rightarrow l^1 \subset l^2$. Entonces G es una biyección continua y $G^{-1} = F$ es discontinua en todo punto $x \in l^1$.

REFERENCIAS

Amann, H. & J. Escher. 2009. Analysis III. First Edition. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Maccluer, B.D. 2009. Elementary Functional Analysis. First Edition. Springer-Verlag, New York.

Mazur, S. 1929. Une Remarque sur L'homèomorphie des Champs Fonctionnels, Studia Math., 1, 83-85.

Rynne, B.P. & M.A. Youngson. 2008. Linear Functional Analysis. Second Edition. Springer-Verlag, London.

Stein, E.M. & R. Shakarchi. 2005. Real Analysis. Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces. First Edition. Princeton University Press, New Jersey.

Recibido junio de 2012, aceptado abril de 2013.